7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

MÔ HÌNH HÀM SỐ

Câu 1: Một công ty kinh doanh và nghiên cứu thị trường trước khi tung sản phẩm mới thì nhận thấy rằng với hai món hàng hóa loại A, B lần lượt có giá sản suất là 2USD và 5USD thì hàm lợi ích (là hàm hai biến chỉ sự phụ thuộc của đại lượng lợi ích kinh doanh so với số lượng hàng hóa) của chúng là $y\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1\right)^{\frac{1}{3}}\left(x_2\right)^{\frac{1}{2}}$ với x_1, x_2 lần lượt là số lượng hàng hóa loại A, B. Nếu vốn để sản suất hàng ban đầu là 1000USD. Hỏi cần sản xuất số lượng hàng loại B là bao nhiêu để đạt doanh thu tối đa?

Lời giải tham khảo

Từ đề ta có quan hệ giữa hai sản phẩm: $2x_1 + 5x_2 = 1000 \ \left(0 \le x_1, x_2 \le 1000\right)$

Thay vào hàm lợi ích ta được hàm: $f\left(x_1\right) = \left(x_1\right)^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1000-2x_1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g\left(x_1\right) = \left(f\left(x_1\right)\right)^6 = \left(x_1\right)^2\left(\dfrac{1000-2x_1}{5}\right)^3$

Ta có: $g'\left(x_1\right) = \left(x_1\right)^2\left(\dfrac{1000-2x_1}{5}\right)^3 = 2x_1\left(\dfrac{1000-2x_1}{5}\right)^3 - \dfrac{6}{5}\left(x_1\right)^2\left(\dfrac{1000-2x_1}{5}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 = 200 \\ x_1 = 500 \end{array}\right.$

Thay vào hàm $g\left(x_1\right)$ thì ta thấy $g\left(200\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy số lượng sản phẩm cần sản xuất mỗi loại là: $x_1 = 200, x_2 = 120$.

Câu 2: Người ta cần bơm 10 lít khí vào bên trong một quả khinh khí cầu. Biết rằng do sức chịu đựng của máy móc có giới hạn nhất định (nếu quá máy sẽ hỏng) nên người ta chia ra làm ba lần bơm. Theo lẽ thường, nếu có x lít khí được bơm ra thì thời gian bơm sẽ là $5x^2$ (giây) nhưng do máy đã cũ nên ở lần thứ 3 gặp trục trặc và thời gian bơm ở lần 3 bị chuyển thành $3x^3$ (giây) (bơm được x lít thì cần thời gian là $3x^3$). Tìm tổng thời gian bơm ngắn nhất mà máy có thể bơm được (làm tròn đến hàng đơn vị). Coi như thể tích khí ở mỗi lần bơm máy đều chịu được.

Lời giải tham khảo

Đáp án: 184

Trước hết ta gọi các lần bơm thứ 1,2,3 sẽ bơm tương ứng là a, b, c lít khí. Khi ấy $a + b + c = 10$

Từ giả thiết suy ra thời gian để bơm là: $T = 5a^2 + 5b^2 + 3c^3$. Khi ấy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức T trên, ta có hai cách:

Cách 1: Biến đổi $T = 5a^2 + 5b^2 + 3c^3 = 5a^2 + 5b^2 + 3\left(10 - a - b\right)^3$ và tìm cách dồn về biến $a + b$.

Khi ấy ta suy ra: $T \ge \dfrac{5}{2}\left(a+b\right)^2 + 3\left(10-a-b\right)^3 = \dfrac{5}{2}t^2 + 3\left(10-t\right)^3$ với $t = a + b \in \left(0;10\right)$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \dfrac{5}{2}t^2 + 3\left(10-t\right)^3$ trên $\left(0;10\right)$ có $f'\left(t\right) = 5t - 9\left(10-t\right)^2$

Giải phương trình $f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow 5t - 9\left(10-t\right)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{185 - 5\sqrt{73}}{18}$ hoặc $t = \dfrac{185 + 5\sqrt{73}}{18}$

Cả hai nghiệm này đều thuộc $\left(0;10\right)$. Bằng cách lập bảng biến thiên dễ thấy rằng:

$T_{\min} = \min\limits_{(0;10)} f(t) = f\left(\dfrac{185-5\sqrt{73}}{18}\right) \approx 183,8(s)$. Vậy thời gian nhanh nhất là $T_{\min} \approx 183,8(s)$

Cách 2: (Chỉ mang tính chất tham khảo) Ta xét hàm số $f(x) = kx^n$ với $x,k>0$ và $n=\overline{2,3,...}$

Thì khi ấy ta luôn có: $f(x) \ge f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0), \forall x_0 > 0$ với "=" xảy ra khi $x = x_0$.

Ta cho hệ số a,b,c bằng nhau để khi cộng lại ta có được $a+b+c=10$ thì khi ấy luôn tồn tại $a=a_0;b=b_0;c=c_0$ sao cho $9{c_0}^2 = 10a_0 = 10b_0$, cùng với $a_0+b_0+c_0=10$ ta có:

Chọn $c_0 = \dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}$, ta có: $3c^3 \ge 9.\left(\dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^2 c - 6.\left(\dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^3$

Với $\dfrac{9}{10}{c_0}^2 = a_0 = b_0$, ta có:

$$5a^2 \ge 9.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^2 a - \frac{81}{20}.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^4 ; 5b^2 \ge 9.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^2 b - \frac{81}{20}.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^4$$

Suy ra: $T = 5a^2+5b^2+3c^3 \ge 9.\left(\dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^2 (a+b+c) - 6.\left(\dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^3 - \dfrac{81}{10}.\left(\dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^4$

$$= 9.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^2 .10 - 6.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^3 - \frac{81}{10}.\left(\frac{-5+5\sqrt{73}}{18}\right)^4 \approx 183,8(s)$$

Vậy thời gian nhanh nhất là $T_{\min} \approx 183,8(s)$ khi $a = b = \dfrac{9c}{10}; c = \dfrac{-5+5\sqrt{73}}{18}$

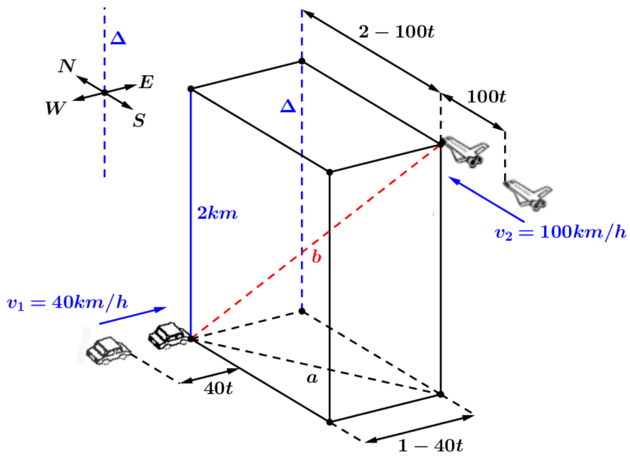
Câu 3: Anh Hùng lái một chiếc xe Mercedes G63 chạy về hướng Đông với vận tốc $v_1 = 40\,km/h$ và một chiếc máy bay đang bay ngang về hướng Bắc có vận tốc là $v_2 = 100\,km/h$. Tại vị trí cầm lái, xem như tầm nhìn của anh Hùng là vô cực và không bị giới hạn, anh Hùng có thể thấy được chiếc máy bay ấy cách $1km$ về hướng Đông, $2km$ về hướng Nam và cách $2km$ so với mặt đất (xem như mặt đất là hoàn toàn bằng phẳng và cũng chính là địa hình mà chiếc xe đang chạy, độ cao của máy bay là không đổi). Biết rằng cả hai phương tiện đều chuyển động thẳng đều và quy ước $t=0$ là mốc tại vị trí ban đầu của cả hai phương tiện đó, sau khoảng bao nhiêu m phút n giây thì khoảng cách giữa hai phương tiện là ngắn nhất $\forall m,n \in \mathbb{Z}$ và làm tròn lên. Tính giá trị của biểu thức $m+n$?

Lời giải tham khảo

Đáp án: 16

Từ bài toán nêu trên, ta phác họa được hình vẽ như sau:

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Cơ sở toán học: Do cả hai phương tiện là chuyển động thẳng đều nên phương trình chuyển động được quy ước như sau: $x = v.t$ với $v(km/h)$ là vận tốc không đổi và $x(km)$ là vị trí của vật đó sau $t(h)$ thời gian chuyển động. Trở lại bài toán nêu trên, ta có:

Sau một khoảng thời gian t thì cả hai phương tiện đều có phương trình chuyển động lần lượt là $40t(km)$ và $100t(km)$. Tiếp đến ta phân tích tại thời điểm t khi vị trí xe ô tô nhìn thấy chiếc máy bay như sau. Lấy mốc tại vị trí xe hơi làm chuẩn, trục Δ là trục mốc phân chia 4 hướng Đông (E), Tây (W), Nam (S) và Bắc (N) như hình vẽ, khi đó ta có:

-Chiếc máy bay ấy cách chiếc xe $1km$ về hướng Đông: khoảng cách từ chiếc xe tại thời điểm t tới trục Δ là: $1-40t(km)$

-Chiếc máy bay ấy cách chiếc xe $2km$ về hướng Nam: khoảng cách từ chiếc máy bay tại thời điểm t tới trục Δ là: $2-100t(km)$

-Chiếc máy bay ấy cách mặt đất $2km$: do không tồn tại vector vận tốc nào theo phương này nên độ cao vẫn là $2km$ (không đổi).

Từ 3 yếu tố nêu trên, ta suy ra khoảng cách giữa hai phương tiện (tức b), là:

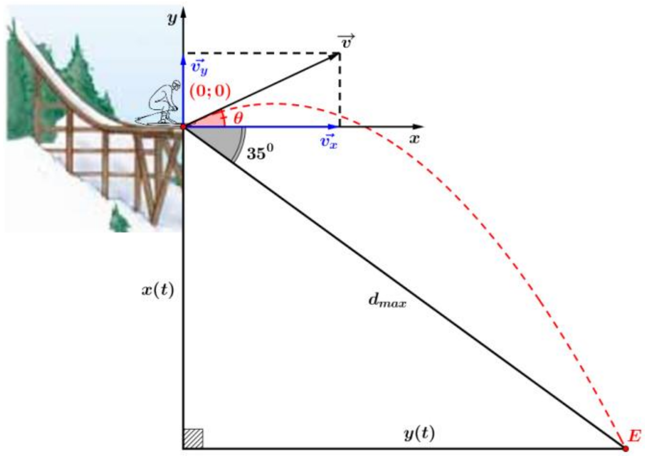
$$b=\sqrt{2^2+a^2}=\sqrt{2^2+(1-40t)^2+(2-100t)^2}\text{, xét hàm số } f(t)=\sqrt{2^2+(1-40t)^2+(2-100t)^2}$$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{-480+23200t}{\sqrt{9-480t+11600t^2}}$. Giải $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{3}{145}(h)(\times 60p)=\dfrac{36}{29}$ (phút)

Khoảng cách ngắn nhất đạt được sau $t=1+\dfrac{7}{29}$ (phút) tức 1 phút 15 giây. Suy ra $m+n=16$

Câu 4: Một vận động viên trượt tuyết trượt xuống máng trượt và rời khỏi máng với vector vận tốc $\vec{v}$ tạo với phương ngang 1 góc θ có độ lớn $v=25m/s$ như hình vẽ. Biết rằng độ dốc d (tính từ điểm kết thúc của máng trượt đến điểm tiếp đất) hợp với phương ngang một góc 35°. Biết rằng hệ phương trình chuyển động theo thời gian t của vận động viên là: $\begin{cases} x(t)=v_x t \\ y(t)=v_y t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ (1) với v_x, v_y lần lượt là các vector thành phần của vector vận tốc $\vec{v}$ khi chiếu lên trục Ox, Oy và hằng số gia tốc trọng trường g không đổi. Hỏi giá trị của θ (độ) phải bằng bao nhiêu để quãng đường tới điểm tiếp đất (d) là lớn nhất

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Lời giải tham khảo

Đáp án: 27,5

Trước hết từ giả thiết đã cho ta suy ra: $\begin{cases} v_x = v\cos\theta \\ v_y = v\sin\theta \end{cases}$ và $\begin{cases} x(t) = d\cos 35^\circ \\ y(t) = d\sin 35^\circ \end{cases}$, kết hợp với phương trình (1) đã cho ta suy ra: $\begin{cases} d.\cos 35^\circ = x(t) = v\cos\theta t & (2) \\ d.\sin 35^\circ = y(t) = v\sin\theta t - \dfrac{1}{2}gt^2 & (3) \end{cases}$. Từ (2) ta suy ra: $t = \dfrac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta}$ và thế vào (3) ta suy ra được phương trình sau: $v.\sin\theta.\dfrac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta} - \dfrac{1}{2}.g.\left(\dfrac{d\cos 35^\circ}{v\cos\theta}\right)^2 = d.\sin 35^\circ$

$$\Leftrightarrow v^2\sin 2\theta\cos 35^\circ - gd\cos^2 35^\circ = -2v^2\cos^2\theta\sin 35^\circ$$

Khi ấy ta thu được phương trình độ dài d là một hàm số theo θ như sau:

$$d = f(\theta) = \frac{v^2\sin 2\theta\cos 35^\circ + 2v^2\cos^2\theta\sin 35^\circ}{g\cos^2 35^\circ} = \frac{v^2}{g\cos 35^\circ}\left(\sin 2\theta + 2\cos^2\theta\tan 35^\circ\right).$$

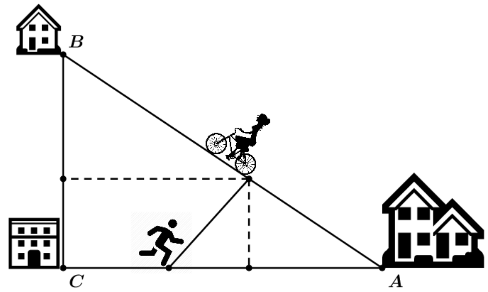
Khảo sát hàm số trên, ta có: $f'(\theta) = \dfrac{v^2}{g\cos 35^\circ}\left(2\cos 2\theta - 4\cos\theta\sin\theta\tan 35^\circ\right)$. Giải phương trình $f'(\theta) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2\theta = 2\sin 2\theta\tan 35^\circ \Leftrightarrow \cot 2\theta = \tan\left(90^\circ - 2\theta\right) = \tan 35^\circ \Leftrightarrow 90^\circ - 2\theta = 35^\circ$

Vậy $d_{\max} = \max f(\theta) = f(\theta_0)$ với $\theta = \theta_0 = 45^\circ - \dfrac{35^\circ}{2} = 27{,}5^\circ$ tức 27,5 (độ)

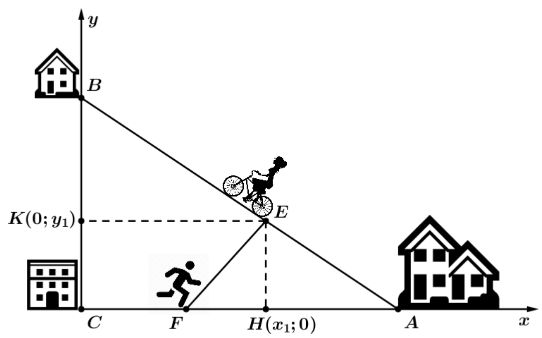
Câu 5: Nhà của ba bạn An, Bình và Cường ở ba vị trí A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại đỉnh C có $AC = 4km$, $BC = 3km$ và có ba con đường thẳng tiếp nối giữa nhà ba bạn. Một buổi chiều sau giờ học, lúc 5 giờ đúng, An đạp xe đạp đi thẳng từ nhà mình đến nhà Bình với vận tốc $10\,km/h$, cùng lúc đó Cường lại đi bộ từ nhà mình theo con đường thẳng hướng đến nhà An với vận tốc $4\,km/h$. Hỏi sau bao nhiêu phút kể từ 5 giờ thì khoảng cách giữa An và Cường là nhỏ nhất ? (làm tròn đến hàng đơn vị nếu kết quả không phải là số nguyên).

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Lời giải tham khảo

Đáp án: 16



Đầu tiên ta gọi t là thời gian tính từ mốc $5h$ với $t \in (0;0,5)$, khi ấy ta có: $\begin{cases} AE = 10t\,(km) \\ CF = 4t\,(km) \end{cases}$

Khi ấy ta có $F(4t;0)$, gọi $E(x_1;y_1)$ với $x_1 = CH$ và $y_1 = CK = EH$

Theo định lí Ta-lét ta có: $\dfrac{EH}{BC} = \dfrac{AE}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{EH}{3} = \dfrac{10t}{5} \Rightarrow EH = 5t = y_1$

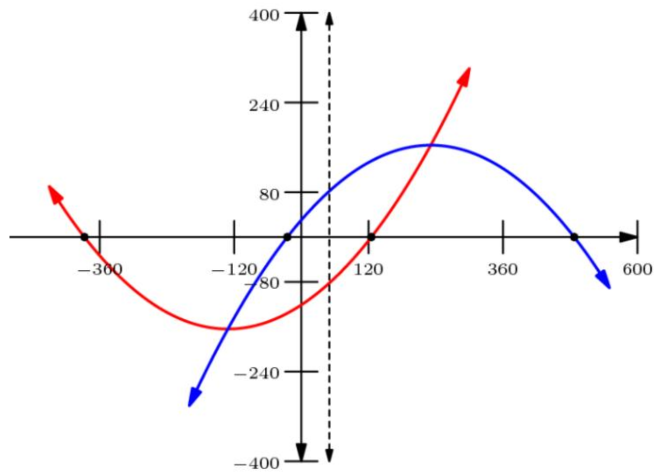
Dùng tính chất đoạn chắn ta viết được phương trình $AB: \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow (AB): y = -\dfrac{3}{4}x + 3$

Mà $E \in (AB)$ nên $6t = -\dfrac{3}{4}x_1 + 3 \Rightarrow x_1 = -8t + 4$. Do đó: $\begin{cases} E(-8t+4;6t) \\ F(4t;0) \end{cases}$.

Suy ra: $EF = \sqrt{(12t-4)^2 + (6t)^2} = \sqrt{180t^2 - 96t + 16}$ là một tam thức bậc hai nên khi ấy $EF_{\min}$ khi và chỉ khi $t = -\dfrac{-96}{2.180} = \dfrac{4}{15}(h)$ tức sau 16 phút từ lúc 5 giờ thì khoảng cách giữa An và Cường là nhỏ nhất.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 6: Trong mặt phẳng địa hình lí tưởng với hệ quy chiếu Oxy như hình vẽ, một chiếc tàu ngầm đang đứng yên (gọi là chất điểm $A(x_1;0)$) phóng một quả ngư lôi theo quỹ đạo là một parabol P_1 từ điểm A xuống dưới nước và trồi lên trên mặt nước tại hoành độ điểm $C(x_3;0)$ (xem như mặt nước biển là trục hoành và quỹ đạo của ngư lôi không thay đổi trong suốt hành trình) và nhắm đến căn cứ quân sự (gọi là chất điểm $D(x_4;0)$). Cùng lúc ấy căn cứ quân sự này phóng một tên lửa tầm nhiệt từ điểm D theo quỹ đạo là một parabol P_2 và lao xuống mặt nước biển tại điểm $B(x_2;0)$ sao cho $BC = 150km$. Biết rằng có hai trường hợp hai đầu đạn đụng nhau là khi đỉnh của parabol này nằm trên quỹ đạo của parabol kia và P_1, P_2 lần lượt là các đồ thị của hàm số $f(x), g(x)$ sao cho $g(x) = -f(100-x)$. Khi ấy khoảng cách từ căn cứ quân sự D đến tàu ngầm A bằng bao nhiêu km ***(làm tròn đến hàng đơn vị)?***



Lời giải tham khảo

Đáp án: 874

Từ hình vẽ mô phỏng trên, ta nhận xét hai đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ có mối quan hệ thông qua phép quay có tâm là tọa độ $(50;0)$. Do đó để giải quyết bài toán nhanh gọn, ta có thể di dời tâm quay này sang điểm khác mà không làm thay đổi đi độ dài của đoạn thẳng BC, tức $|x_3 - x_2| = x_3 - x_2 = BC = 150$ (do $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$).

Khi đó ta dời tâm quay từ $(50;0)$ sang $(0;0)$, ta suy ra $x_3 = -x_2 = 75$ và $x_4 = -x_1$, khi ấy $f(x)$ trở thành $p(x)$ và $g(x)$ trở thành $q(x)$ sao cho $p(x) = -q(-x)$ và x_3, x_2 lần lượt là các nghiệm của $p(x)$ và $q(x)$. Suy ra x_1, x_4 lần lượt là các nghiệm của $p(x)$ và $q(x)$, khi ấy ta có được: $p(x) = a(x-75)(x-x_1)$ và $q(x) = -a(x+75)(x+x_1)$.

Khi đó ta có đỉnh của đồ thị $p(x)$ có hoành độ là $\dfrac{75+x_1}{2}$ và theo giả thiết ta thế vào $q(x)$, thu được:

$$p\left(\frac{75+x_1}{2}\right) = -\frac{a}{4}(75-x_1)^2 = q\left(\frac{75+x_1}{2}\right) = -\frac{a}{4}(x_1+225)(3x_1+75).$$

Tóm lại ta có được phương trình sau: $(75-x_1)^2 = (x_1+225)(3x_1+75)$. Đặt $x_1 = 75u, u < -1$ thì phương trình trở thành: $(3u+1)(u+3) = (u-1)^2 \Leftrightarrow u^2 + 6u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -3 \pm 2\sqrt{2}$.

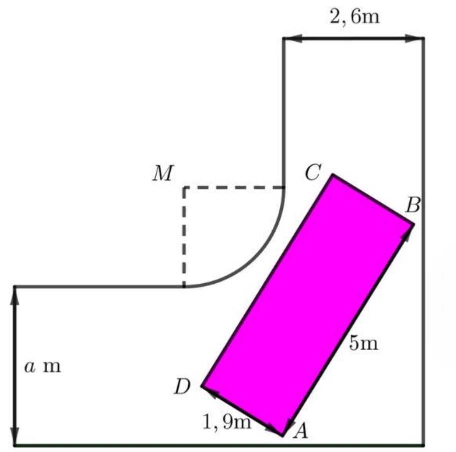
Mà $u < -1$ nên $u = -3 - 2\sqrt{2}$ tức $x_1 = -75(3+2\sqrt{2})$.

Suy ra khoảng cách cần tìm là $AD = x_4 - x_1 = -x_1 - x_1 = -2x_1 = 150(3+2\sqrt{2}) \approx 874,264$

$\longrightarrow \boxed{AD = 874km}$

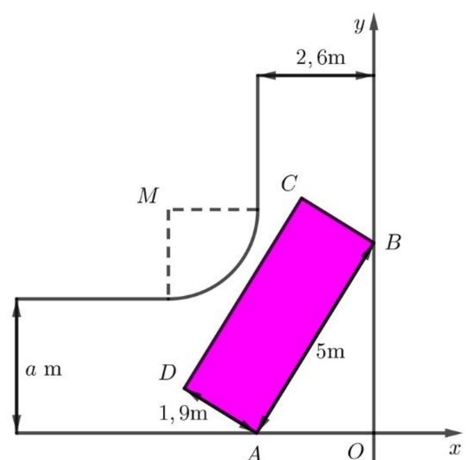
7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 7: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào gara ô tô, đoạn đường đầu tiên rộng $a(m)$ và đoạn đường thẳng vào cổng gara rộng $2,6m$. Khúc cua cong là một phần tư đường tròn tâm M bán kính bằng $2m$. Biết xe ôtô có kích thước $5m\times1,9m$, để tính toán và thiết kế đường đi cho ôtô ta coi ôtô là một khối hộp chữ nhật có chiều dài $5m$, chiều rộng $1,9m$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên là bao nhiêu mét để ôtô có thể đi vào gara được? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, giả thiết ôtô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ôtô không bị biến dạng).



Lời giải tham khảo

Đáp án: 2,45



Gọi $M(-4,6;a+2)$ và đặt $OAB=\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}OA=AB.\cos\alpha=5\cos\alpha\\OB=AB.\sin\alpha=5\sin\alpha\end{cases}$

Khi ấy ta có phương trình $AB:\frac{x}{-5\cos\alpha}+\frac{y}{5\sin\alpha}=1\Leftrightarrow -x.\sin\alpha+y\cos\alpha-5\sin\alpha\cos\alpha=0$

Để xe qua góc cua cong đó thì đường thẳng CD không được cắt cung tròn $(M;2)$ tại hai điểm phân biệt tức ta có: $d(M;CD)\ge2\Leftrightarrow d(M;AB)\ge2+1,9=3,9$, phương trình tương đương với:

$$-\sin\alpha.(4,6)+\cos\alpha.(a+2)-5\sin\alpha\cos\alpha=0\Leftrightarrow a\ge g(\alpha)=\frac{5\sin\alpha\cos\alpha+3,9-4,6\sin\alpha}{\cos\alpha}-2$$

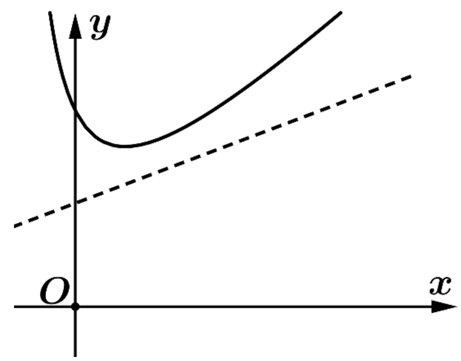
Xét hàm số $g(\alpha)=5\sin\alpha-4,6\tan\alpha+\dfrac{3,9}{\cos\alpha}-2$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ ta dễ thấy

$$g'(\alpha)=5\cos\alpha+\frac{3,9\sin\alpha-4,6}{\cos^2\alpha}=0\Leftrightarrow\cos^3\alpha=4,6-3,9\sin\alpha\Leftrightarrow\alpha=\alpha_0\approx 0,756$$

Suy ra $a\ge\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} g(\alpha)=g(\alpha_0)\approx 2,45m$, hoặc bấm $\dfrac{d}{dx}\left(5\sin x-4,6\tan x+\dfrac{3,9}{\cos x}\right)_{x=x}$

Ta thu được: $\xrightarrow{\text{shift SOLVE } x=1} x\approx 0,756$

Câu 8: Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm là một phần đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+e}$ như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng 100 sản phẩm và mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng 1000USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là $A\left(-1;\dfrac{2}{3}\right)$ và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $B(3;2)$. Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bởi hàm số $R(x)=x^2+2x$ và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250 USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất thì số sản phẩm sản xuất được là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải tham khảo

Dễ dàng suy ra được $e=1$ và đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$

Gọi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y=ax+b$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases}-a+b=\dfrac{2}{3}\\ 3a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=1\end{cases}$ nên đường tiệm cận xiên là $y=\dfrac{1}{3}x+1$

Hàm số $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+e}$ được viết lại dưới dạng $f(x)=\dfrac{1}{3}x+1+\dfrac{d}{x+1}$

Lợi nhuận = Doanh thu − Chi phí $\Leftrightarrow P(x)=R(x)-f(x)\Leftrightarrow x^2+2x-\dfrac{1}{3}x-1-\dfrac{d}{x+1}$

Theo giả thiết lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250 USD.

Khi đó $P(2)=5,25\Leftrightarrow\dfrac{19}{3}-\dfrac{d}{3}=5,25\Leftrightarrow d=\dfrac{13}{4}=3,25$

Vậy $f(x)=\dfrac{1}{3}x+1+\dfrac{3,25}{x+1}$ có đạo hàm $f'(x)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3,25}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\sqrt{39}}{2}-1(loai)\\ x=\dfrac{\sqrt{39}}{2}-1(nhan)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\sqrt{39}}{2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{17}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{39}}{3}+\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 9: Một nhà sản xuất trung bình bán được 1500 tivi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 15 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 600 nghìn đồng, số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 120 tivi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi tivi trong đó x là số lượng tivi.

a) Hàm cầu là $p=-\frac{x}{200}+\frac{45}{2}$ (triệu đồng)

b) Tổng doanh thu từ tiền bán tivi là: $f\left(p\right)=-200p^2+450p$ (triệu đồng)

c) Công ty giảm giá 3,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ là lớn nhất.

d) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C\left(x\right)=12000-\frac{7x}{2}$ (triệu đồng) trong đó x là số lượng tivi bán ra trong tuần thì nhà sản xuất nên đặt giá bán là 9,5 triệu đồng là hợp lí nhất vì đem lại lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải tham khảo

a) Đúng: Giảm 0,6 triệu (***mức độ giảm***) → Thêm 120 chiếc

→ Giá bán ra là: $15-0,6$ (triệu đồng) và số lượng bán ra là: $1500+120$ (chiếc)

Như vậy với giảm y (triệu đồng) → số lượng bán ra trở thành: $\frac{120}{0,6}y$ (chiếc)

→ Giá bán ra là: $15-y$ (triệu đồng) → số lượng bán ra trở thành: $1500+\frac{120}{0,6}y$ (chiếc)

Mà x là số lượng tivi thực tế cần bán ra nên suy ra $1500+\frac{120}{0,6}y=x\Rightarrow y=\frac{0,6}{120}\left(x-1500\right)$

Suy ra giá bán (hàm cầu = giá bán ban đầu – ***mức độ giảm***):

$$p\left(x\right)=15-y=15-\frac{0,6}{120}\left(x-1500\right)=\frac{45}{2}-\frac{x}{200}$$ (triệu đồng). Suy ra $x=4500-200p$ **(1).**

b) Sai: Hàm doanh thu: $R\left(x\right)=x.p\left(x\right)=\frac{45}{2}x-\frac{x^2}{200}$ (triệu đồng) **(2).**

Từ (1) và (2) suy ra: $R\left(p\right)=-200p^2+4500$ (triệu đồng).

c) Sai: Hàm lợi nhuận: $P\left(x\right)=R\left(x\right)-C\left(x\right)=-\frac{x^2}{200}+26x-12000$ (triệu đồng)

Khi ấy: $P\left(x\right)=-\frac{1}{200}\left(x-2600\right)^2+21800\le 21800$ (triệu đồng)

Vậy lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất khi bán ra được 2600 chiếc tivi.

d) Đúng:

Với $x = 2600$, thế vào quan hệ $y = \dfrac{0,6}{120}(x - 1500)$ suy ra $y = 5,5$

Vậy ta suy ra giá bán ra hợp lí là: $15 - y = 15 - 5,5 = 9,5$ (triệu đồng)

Câu 10: Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết nhu cầu thị trường là $Q = 10000 - P$, trong đó Q là số sản phẩm và P là giá bán sản phẩm (đơn vị: nghìn đồng). Doanh nghiệp chỉ ra rằng chi phí khi sản xuất Q sản phẩm là $C(Q) = Q^2 + 6000Q - 2000$ (nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là T (nghìn đồng) (*Nói cách khác:* mức thuế phụ thu tỉ lệ thuận với đơn giá bán ra với hằng số không đổi và không vượt quá đơn giá bán ra). Để nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu mỗi sản phẩm lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó (xem như số sản phẩm sản xuất bán ra được doanh nghiệp bán hết) thì mức thuế phụ thu phải là bao nhiêu (làm tròn đến chục nghìn đồng)

Lời giải tham khảo

Đáp án: 2,05

Với Q là số sản phẩm và P là giá bán ra của mỗi sản phẩm.

Suy ra giá bán ra Q sản phẩm là: $P.Q = P(10000 - P) = R(P)$

Với $C(Q) = Q^2 + 6000Q - 2000$ (nghìn đồng) và hàm doanh thu $R(P) = P.Q$ đã nêu trên, ta suy ra hàm lợi nhuận chưa bao gồm thuế (theo P) là:

$$K = R(P) - C(P) = P(10000 - P) - \left[(10000 - P)^2 + 6000(10000 - P) - 2000\right]$$

$$= -2P^2 + 36000P - 159998000 \text{ (nghìn đồng)}$$

Do thuế phụ thu không được phép lớn hơn đơn giá mỗi sản phẩm bán ra nên với $a \in (0;1)$, ta có mức thuế phụ thu T là: $T = a.P$ (nghìn đồng)

Bước 1: xác định giá trị lợi nhuận sau thuế đạt lớn nhất khi P bằng bao nhiêu.

Ta có tổng thuế là $I = T.Q = T(10000 - P) = a.P(10000 - P)$ với $T = a.P, \forall a \in (0;1)$

Suy ra lợi nhuận sau khi trừ thuế là: $K - I = f(P)$

Khảo sát hàm số $f(P)$ ta có: $f'(P) = 1000(36 - 10a) + P(2a - 4)$

Lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất khi $f(P)$ tồn tại cực trị.

Giải phương trình $f'(P) = 0 \Leftrightarrow 1000(36 - 10a) + P(2a - 4) = 0 \Rightarrow P = \dfrac{1000(5a - 18)}{a - 2}$

Bước 2: Thế hàm số P theo biến a vào hàm tổng thuế I để tìm giá trị $I_{\max}$ khi giá trị a bằng bao nhiêu, sau đó thế lại vào thuế phụ thu T.

Ta có: $I = a.P(10000 - P) = a\left(\dfrac{5000a - 18000}{a - 2}\right)\left(10000 - \dfrac{5000a - 18000}{a - 2}\right)$

Xét hàm số $f(a) = a\left(\dfrac{5a - 18}{a - 2}\right)\left(10 - \dfrac{5a - 18}{a - 2}\right)$ với $a \in (0;1)$.

Ta biến đổi:

$$f(a)=a\left(\frac{5a-18}{a-2}\right)\left(10-\frac{5a-18}{a-2}\right)=a\left(\frac{5a-18}{a-2}\right)\left(\frac{5a-2}{a-2}\right)=a\left(5-\frac{8}{a-2}\right)\left(5+\frac{8}{a-2}\right)$$

$$a\left(25-\frac{64}{(a-2)^2}\right)=25a-\frac{64a}{(a-2)^2}.\text{ Suy ra ta có: } f'(a)=25+\frac{64(a+2)}{(a-2)^3}$$

Giải phương trình $f'(a)=0\Leftrightarrow\frac{a+2}{(a-2)^3}=-\frac{25}{64}\xleftrightarrow[CALC]{}a=0,216\in(0;1)$ (hợp lệ)

Vậy thuế phụ thu cần tìm là $T=a.P=\left.\frac{1000a(5a-18)}{a-2}\right|_{a=0,216}=2,048$ (nghìn đồng) tức làm tròn thành 2,05 (chục nghìn đồng)

Câu 11: Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (USD) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x)=x-200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x)=4200-x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0=3200$ (USD). Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (USD) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là $4:1$. Hãy xác định giá trị của a biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

Lời giải tham khảo

Sản phẩm dư xuất khẩu khi số sản phẩm sản xuất lớn hơn số sản phẩm bán trong nước, tức là:

$$R(x)>Q(x)\Leftrightarrow x-200>4200-x\Leftrightarrow 2x>4400\Leftrightarrow x>2200$$

Số lượng sản phẩm xuất khẩu là: $S_{XK}=R(x)-Q(x)=(x-200)-(4200-x)=2x-4400$

Giá bán ròng sau thuế mỗi sản phẩm xuất khẩu là: $3200-a$ (USD)

Tổng doanh thu từ xuất khẩu là: $D_{XK}=S_{XK}.(3200-a)=(2x-4400)(3200-a)$

Tổng chi phí sản xuất cho số sản phẩm xuất khẩu là: $C_{XK}=S_{XK}.x=(2x-4400)x$

Lợi nhuận từ việc xuất khẩu sản phẩm là:

$$L_{XK}=D_{XK}-C_{XK}=(2x-4400)(3200-a)-(2x-4400)x=(2x-4400)(3200-a-x)\ (1)$$

Thuế thu được từ sản phẩm xuất khẩu là: $T=a.S_{XK}=a(2x-4400)$

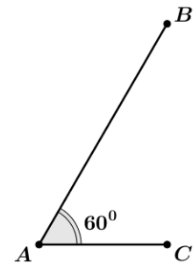
Theo bài ra, tỷ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là $4:1$ nên ta có:

$$\frac{L_{XK}}{T}=\frac{4}{1}\Leftrightarrow L_{XK}=4T\Leftrightarrow(2x-4400)(3200-a-x)=4a(2x-4400)\Leftrightarrow a=\frac{3200-x}{5}$$

Thay vào (1) ta được: $L_{XK}=\frac{8}{5}(x-2200)(3200-x)$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức đạt được tại $x=2700$. Khi đó $a=\frac{3200-2700}{5}=100$.

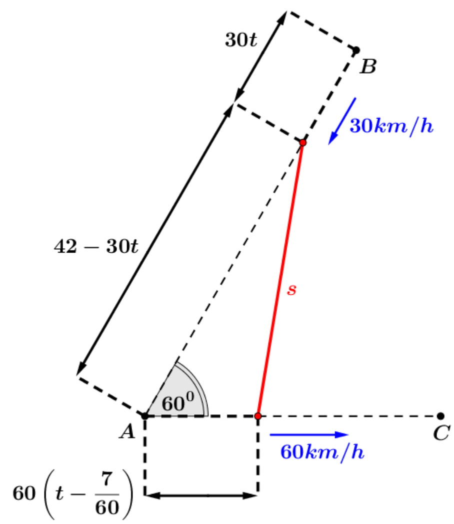
7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 12: Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm A và đi đến điểm C với vận tốc là $60\,km/h$. Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm B và điểm B với vận tốc là $30\,km/h$ sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau 1 góc 60 độ như hình vẽ dưới đây. Cho trước $AB = 42km$ và vào lúc a giờ b phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cự li gần nhất để vẫy tay chào nhau với $a,b \in \mathbb{N}^*$. Tính $a+b$? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



Lời giải tham khảo

Đáp án: 41



Để giải quyết bài toán trên, ta sẽ chọn thời điểm 12 giờ 00 phút làm mốc thời gian gốc.

Trước hết tại xe anh Hùng, với vận tốc là $30\,km/h$ thì quãng đường chạy được của xe sau thời gian t (giờ) là: $30t$ (km). Mà quãng đường cho trước là $AB = 42km$ nên khi ấy quãng đường còn lại mà xe phải chạy kể từ lúc t (giờ) để tới đích đến là: $42-30t$ (km).

Tiếp theo, tại xe anh Quang, do xuất phát sớm hơn xe anh Hùng 7 phút nên quãng đường chạy được của xe sau thời gian $t-\dfrac{7}{60}$ (giờ) ứng với vận tốc $60\,km/h$ là: $60\left(t-\dfrac{7}{60}\right)$ (km).

Lúc này từ hình vẽ minh họa, ta áp dụng định lí Cosin, khi ấy cự li s giữa hai xe sau thời gian t (giờ) tương ứng là: $s^2 = \left[60\left(t-\dfrac{7}{60}\right)\right]^2 + (42-30t)^2 - 2.60\left(t-\dfrac{7}{60}\right).(42-30t).\cos 60^\circ$

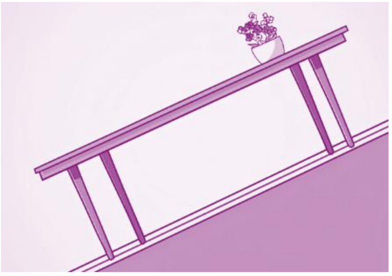
Lúc này ta biến đổi được: $s^2 = 6300t^2 - 6090t + 2107$ tức $s = \sqrt{6300t^2 - 6090t + 2107}$

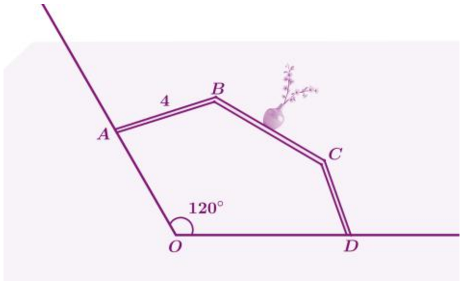
Xét hàm số $f(t) = \sqrt{6300t^2 - 6090t + 2107}$ có $f'(t) = \dfrac{12600t - 6090}{2\sqrt{6300t^2 - 6090t + 2107}}$

Giải phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{29}{60}$ (giờ) tức hai xe có cự li gần nhất vào lúc 12 giờ 29 phút.

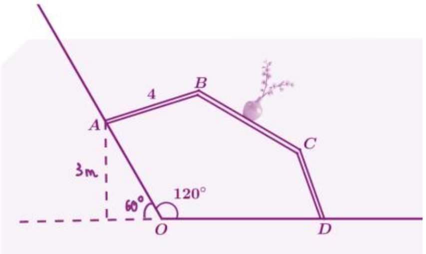
Vậy ta kết luận: $a+b = 12+29 = 41$.

Câu 13: Một chiếc bàn có dạng một nửa của hình lục giác đều cạnh bằng 4 m đang trượt trên một đoạn dốc có góc nghiêng so với mặt đất nằm ngang là $120°$ như hình vẽ. Khi đầu dưới của chiếc bàn trên mặt đất trượt ra xa bức tường với vận tốc không đổi $2\mathrm{m/s}$ thì đầu trên cùng của chiếc bàn sẽ trượt dọc theo bức tường. Khi điểm đầu chiếc bàn (trên dốc) có chiều cao cách mặt đất $3\mathrm{m}$ thì tốc độ di chuyển của nó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).





Lời giải tham khảo



Khi đầu bàn cách mặt đất $3m \to x == 2\sqrt{3}$.

Vì $ABCD$ là hình thang cân thỏa mãn $AB = BC = CD = 4m \Rightarrow AD = 8(m)$

Ta cần tìm tốc độ di chuyển của đầu A hay còn gọi là tốc độ thay đổi của x, suy ra ta cần tìm $x'(t)$.

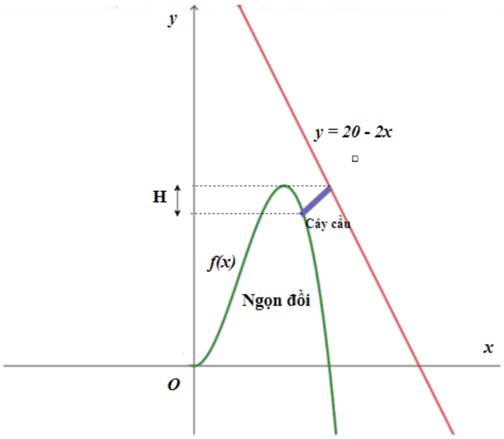
Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác AOD ta có:

$$8^2 = x^2 + (2t)^2 - 2x.2t.\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 64 = x^2 + 4t^2 + 2xt \Leftrightarrow x^2 + 2xt + 4t^2 - 64.$$

$\Delta' = t^2 - 4t^2 + 64 = 64 - 3t^2 \Rightarrow x = -t + \sqrt{64 - 3t^2} \Rightarrow x'(t) =$ (ta không lấy nghiệm x còn lại vì điểm A nằm ở phía trên đường thẳng OD).

xét $2\sqrt{3} = -t + \sqrt{64 - 3t^2} \Leftrightarrow t = 2,84(\mathrm{s}) \Rightarrow x'(2,84) = 2,35.$

Câu 14: Một ngọn đồi được giới hạn bởi một đường cong trong hệ tọa độ Oxy và được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$ *(tham khảo hình vẽ)*. Vị trí điểm cực đại là $(4;8)$ với đơn vị của hệ trục là $100m$ và vị trí điểm cực tiểu là gốc tọa độ O. Một con đường được xây dựng dọc theo đồi có phương trình $d: y = 20 - 2x$. Người ta muốn xây dựng một cây cầu dạng đoạn thẳng nối từ ngọn đồi ra mặt đường. Biết rằng chi phí xây dựng cầu phụ thuộc vào chiều dài của cây cầu, công thức chi phí xây dựng là $C = 20000L + 500H$ (USD), trong đó L là chiều dài cây cầu và H là độ cao chênh lệch giữa hai đầu cầu được tính dựa vào $L_{\min}$. Hỏi chi phí xây dựng cây cầu là bao nhiêu nếu người ta muốn tối ưu hóa chiều dài cây cầu $L_{\min}$? *(làm tròn đến hàng đơn vị)*



Lời giải tham khảo

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Ta có $f'(x) = ax(x-4) \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right) + C$

Lại có: $f(0) = 0$ và $f(4;8) \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ a\left(\frac{4^3}{3} - 2.4^2\right) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases}$

Suy ra $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 20 - 2x$

Khi đó $-\frac{3}{4}x_0^2 + 3x_0 = -2 \Rightarrow x_0 = \frac{6 + 2\sqrt{15}}{3}$

Chiều dài cây cầu L có thể tính được bằng cách: $L = d(M; d) = \frac{|2.x_0 + 1.f(x_0) - 20|}{\sqrt{5^2 + 1}}$

Tính chiều cao chênh lệch H:

Ta có đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ là đường thẳng đi qua $M(x_0; f(x_0))$ và vuông góc với $d: y = 20 - 2x$

Suy ra $a.(-2) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ và $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - \frac{1}{2}x_0$

Khi đó $\Delta: y = \frac{1}{2}x + f(x_0) - \frac{1}{2}x_0$

Gọi $N \in d$ là đầu cầu thứ 2:

$$\begin{cases} y_N = \frac{1}{2}x_N + f(x_0) - \frac{1}{2}x_0 \\ y_N = 20 - 2x_N \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}x_N = 20 - f(x_0) + \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow x_N = \frac{1}{5}x_0 - \frac{2}{5}f(x_0) + 8$$

$$\Rightarrow y_N = \frac{4}{5}f(x_0) - \frac{2}{5}x_0 + 4$$

Vậy: $H = \left|\left(\frac{4}{5}f(x_0) - \frac{2}{5}x_0 + 4\right) - f(x_0)\right|$

Chi phí xây dựng cây cầu: $C = 20000L + 500H \approx 13649$ USD

Câu 15: Một công ty sản xuất điện thoại di động bán trung bình 2000 chiếc mỗi tuần với giá 20 triệu đồng mỗi chiếc. Qua khảo sát thị trường, công ty nhận thấy rằng cứ mỗi lần giảm giá bán 1 triệu đồng, số lượng điện thoại bán ra sẽ tăng thêm 200 chiếc mỗi tuần. Tuy nhiên, nếu giảm giá bán quá nhiều, lợi nhuận biên từ mỗi chiếc điện thoại sẽ giảm xuống, với mỗi lần giảm giá thêm 1 triệu đồng, chi phí sản xuất cho mỗi chiếc điện thoại sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng. Biết rằng chi phí ban đầu để sản xuất mỗi chiếc điện thoại là 10 triệu đồng, và chi phí cố định hàng tuần của công ty là 20,000 triệu đồng. Công ty nên đặt giá bán mỗi chiếc điện thoại ở mức nào để tối đa hóa lợi nhuận hàng tuần? *(đơn vị triệu đồng, làm tròn đến hàng phần trăm)*

Lời giải tham khảo

Giá bán và số lượng bán ra:

Ban đầu, nhà sản xuất bán 2000 chiếc Điện thoại với giá 20 triệu đồng mỗi chiếc.

Nếu giảm giá mỗi chiếc Điện thoại đi 1 triệu đồng, số lượng bán ra sẽ tăng thêm 200 chiếc mỗi tuần.

Giả sử $x \in \mathbb{Z}$ là số lượng Điện thoại bán ra. Ta có:

$$p(x) = 20 - 1.\frac{x-2000}{200} = 30 - 0,005x \text{ (triệu đồng)}$$

Đây là công thức để tính giá bán mỗi chiếc Điện thoại khi số lượng bán ra là x chiếc.

Chi phí sản xuất cho mỗi chiếc điện thoại:

Chi phí ban đầu cho mỗi chiếc điện thoại là 10 triệu đồng.

Khi giảm giá bán đi 1 triệu đồng, chi phí sản xuất tăng thêm $0,5$ triệu đồng.

Số tiền mà giá bán đã giảm so với mức ban đầu (20 triệu đồng):

$$20 - p(x) = 20 - (30 - 0,005x) = 0,005x - 10$$

Chi phí sản xuất mỗi chiếc điện thoại:

$$C_m(x) = 10 + 0,5(0,005x - 10) = 5 + 0,0025x$$

Tổng doanh thu khi bán x chiếc điện thoại sẽ là:

$$R(x) = p(x).x = (30 - 0,005x)x = 30x - 0,005x^2 \text{ (triệu đồng)}$$

Tổng chi phí khi bán x chiếc điện thoại sẽ là:

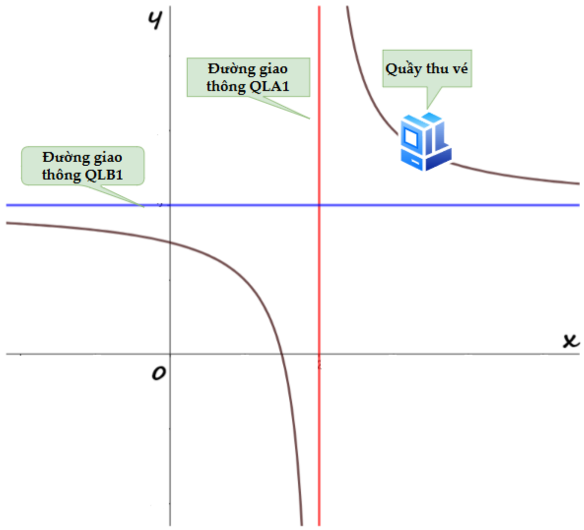
$$C(x) = 20000 + (5 + 0,0025x).x = 20000 + 5x + 0,0025x^2 \text{ (triệu đồng)}$$

Lợi nhuận khi bán x chiếc điện thoại sẽ là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 30x - 0,005x^2 - (20000 + 5x + 0,0025x^2) = 25x - 20000 - 0,0075x^2 \text{(triệu đồng)}$$

Suy ra $P(x)_{\max} = \frac{2500}{3}$ tại $x = \frac{5000}{3}$ .Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1666 \Rightarrow p(1666) = 21,67$ triệu đồng

Câu 16: Một khu du lịch được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy bằng một phần đồ thị hàm số: $y = \frac{2x-3}{x-2}$ (C). Người ta xây dựng một quầy thu vé tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C), với hoành độ $x_0 > 2$. Khu vực này có hai tuyến đường giao thông. Tuyến đường giao thông QLA1 dọc theo đường tiệm cận đứng của đồ thị (C). Tuyến đường giao thông QLB1 dọc theo đường tiệm cận ngang của đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tuyến đường giao thông này. Hãy xác định điểm M (từ quầy thu vé) (với $x_0 > 2$) sao cho tiếp tuyến tại M cắt hai tuyến đường giao thông tại hai điểm A và B, tạo thành một tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất. Khi đó, hãy tính khoảng cách từ quầy thu vé đến giao điểm của hai tuyến đường giao thông chính QLA1 và QLB1 *(làm tròn đến hàng phần trăm)*



Lời giải tham khảo

Đáp án: 1,41

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)\Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$ và $y'_0=-\dfrac{1}{\left(x_0-2\right)^2}$ và có $I\left(2;2\right)$

Phương trình tiếp tuyến $\left(d\right)$ của $\left(C\right)$tại $M: y=\dfrac{-1}{\left(x_0-2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}$

$\left(d\right)$ cắt hai đường tiệm cận tại hai điểm phân biệt $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B\left(2x_0-2;2\right)$.

Theo trên ta có : $IA=\sqrt{\left(\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}-2\right)^2}=\dfrac{2}{\left|x_0-2\right|}; IB=\sqrt{\left(2x_0-2-2\right)^2}=2\left|x_0-2\right|\Rightarrow IA.IB=4$

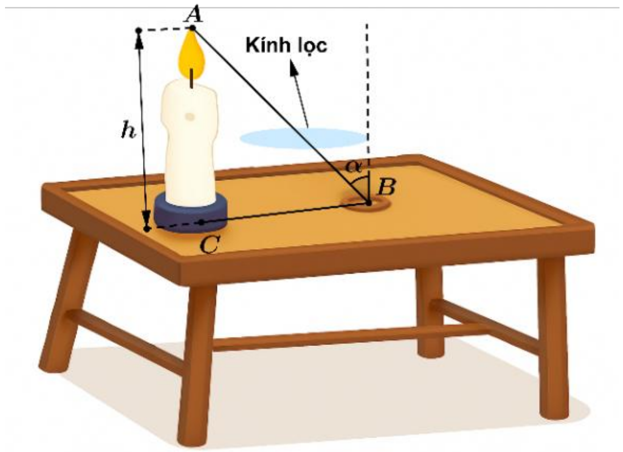
Chu vi tam giác $y-y_0=y'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow y-\left(x_0^3-3x_0^2+2\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)$ là :

$$P=IA+IB+AB=IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}\geq 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}=4+2\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $A\left(\dfrac{23}{9};-2\right)$. Hay $\dfrac{2}{\left|x_0-2\right|}=2\left|x_0-2\right|\Rightarrow\left(x_0-2\right)^2=1\xrightarrow{x_0>2}x_0=3$

Vậy $M\left(3;3\right)\Rightarrow IM=\sqrt{2}\approx 1,41$

Câu 17: Trong quang học, chúng ta đã biết đến định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng đến một điểm cho bởi công thức $T=I.\dfrac{\cos\alpha}{AB^2}$, trong đó I là độ phát sáng của nguồn; α là góc hợp bởi tia sáng và phương thẳng đứng (minh họa như hình vẽ). Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC=20\,\text{cm}$. Để tạo hiệu ứng, người ta đặt một tấm kính lọc phía trên đồng xu với hệ số truyền sáng của kính là $k=\sin^2\alpha$. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao bằng bao nhiêu cm để độ sáng thực tế chiếu lên đồng xu là lớn nhất, biết độ sáng thực tế $T'=kT$?



Lời giải

Trả lời: 10

Ta có: $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$ nên suy ra $T = I.\dfrac{AC}{AB^3}$ mà $\sin\alpha = \dfrac{20}{AB} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{400}{AB^2}$

Xét tam giác ABC vuông tại C nên ta có $AB = \sqrt{h^2 + 20^2}$ mà $T' = k.T = \dfrac{400.I.h}{\left(\sqrt{h^2 + 400}\right)^5}$

Dùng chức năng $\boxed{\dfrac{d}{dX}}$ suy ra được $x = h = 10$ nên ngọn lửa của cây nến đặt ở độ cao bằng 10 cm thì độ sáng thức tế chiếu lên đồng xu là lớn nhất.

Câu 18: Trước sự phát triển của ngành vật liệu bán dẫn, anh Khoa mở nhà máy sản xuất vi mạch với thiết kế của vi mạch có dạng hình chữ nhật có kích thước $a(\text{pm}) \times b(\text{pm})$ với $1\text{pm} = 10^{-12}$ m.Biết rằng chi phí để sản xuất vi mạch bao gồm 50 (triệu đồng) chi phí cho nguyên vật liệu ban đầu, 15 (triệu đồng) /1pm chi phí gia công lắp màng Silic xung quanh thành vi mạch (xem như độ dày khi gia công là không đáng kể) và 32 (triệu đồng)/1pm^2 tiền gia công phủ chất làm mát bao quanh cả 2 bề mặt vi mạch (xem như cả bề mặt là hình chữ nhật có kích thước như trên). Biết rằng đơn giá bán ra mỗi chiếc vi mạch là 428 (triệu đồng/pm^2) và nếu cả 2 kích thước thành phần của vi mạch giảm đi 15 pm thì lợi nhuận thu được mỗi chiếc bằng chi phí sản xuất của mỗi chiếc vi mạch đó. Khi lợi nhuận đạt giá trị nhỏ nhất thì chu vi của vi mạch là bao nhiêu pm. (Kết quả làm tròn đến số thập phân thứ nhất)

Lời giải tham khảo

Trả lời: 63,2

Từ giả thiết ta có hàm chi phí sản xuất vi mạch là: $C(a,b) = 50 + 15.2(a+b) + 32.(2ab)$

Sau khi giảm đi 15 pm của mỗi kích thước của vi mạch thì chi phí sản xuất được biễu diễn lại theo hàm mới là:

$C(a-15, b-15) = 50 + 15.2(a+b-30) + 64(a-15)(b-15)$ (triệu đồng)

Đơn giá bán ra mỗi chiếc vi mạch là: $R(a-15, b-15) = 428(a-15)(b-15)$ (triệu đồng)

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Lợi nhuận = Doanh thu - Chi phí nên khi cả 2 kích thước thành phần của vi mạch giảm đi 15 pm thì lợi nhuận thu được mỗi chiếc bằng chi phí sản xuất của mỗi chiếc vi mạch đó sẽ tương ứng với đơn giá bán ra sẽ gấp 2 lần chi phí sản xuất.

Từ đó ta có thể suy ra được: $R(a-15,b-15)=2C(a-15,b-15)$

Khi đó ta có phương trình: $5+3(a+b-30)=15(a-15)(b-15)\Rightarrow b=\dfrac{4(57a-865)}{3(5a-76)}$ (1).

Lợi nhuận ban đầu lúc này được biểu diễn theo hàm số sau:

$T(a)=R(a)-C(a)=\dfrac{82542a^2-1260190a+115200}{3(5a-76)}, a>15$ (triệu đồng)

Xét $T'(a)=\dfrac{27514}{5}-\dfrac{770392.3}{5(15a-228)^2}=0\Leftrightarrow a=a_0=\dfrac{76}{5}+\dfrac{2}{5}\sqrt{\dfrac{7}{3}}>15$ (thỏa mãn).

Suy ra $T(a_0)$ là giá trị lợi nhuận nhỏ nhất, thế vào (1) suy ra $b_0=\dfrac{4(57a_0-865)}{3(5a_0-76)}$

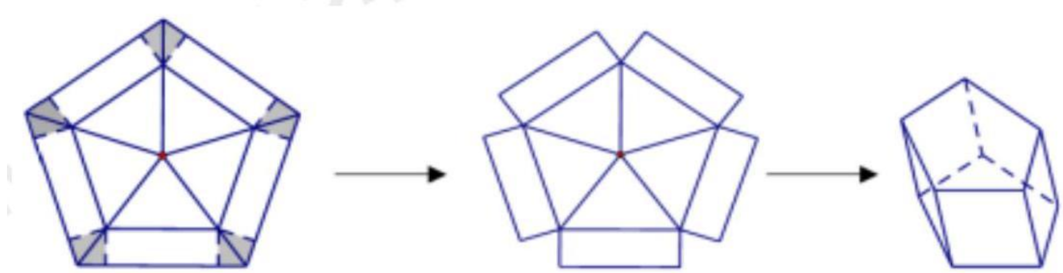
Tức $2.(a+b)\approx 63,2(pm)$.

Câu 19: Cho một tấm tôn hình một ngũ giác đều có cạnh bằng 6 dm. Người ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Cắt ở mỗi đỉnh của ngũ giác đều đó hai tam giác vuông bằng nhau.

Bước 2: Cắt theo nét đứt đoạn để thu được hình hợp bởi một ngũ giác đều và năm hình chữ nhật.

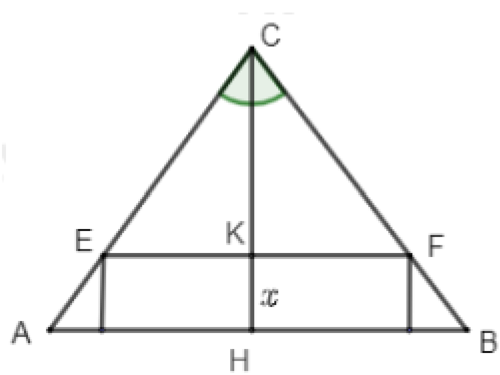
Bước 3: Gấp các hình chữ nhật để tạo thành khối lăng trụ ngũ giác đều (tham khảo hình vẽ).



Thể tích của khối lăng trụ lớn nhất bằng bao nhiêu đề-xi-mét khối? *(làm tròn kết quả đến hàng chục).*

Lời giải tham khảo

Trả lời: 37,9



Ngũ giác được chia thành 5 tam giác. Xét tam giác ABC cân tại C có $ACB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ C xuống AB, có $AB = 6, AH = BH = 3$.

Mặt khác CH là đường phân giác góc C, có $AHC = BHC = 36^\circ$. Suy ra $CH = \frac{AH}{\tan 36^\circ} = \frac{3}{\tan 36^\circ}$

Đặt $KH = x$, khi đó $KH = x$ là đường cao của khối lăng trụ và $CK = CH - KH = \frac{3}{\tan 36^0} - x$

Xét tam giác vuông CEK, có $\tan 36^\circ = \frac{EK}{CK} \Rightarrow EK = CK.\tan 36^\circ = \left(\frac{3}{\tan 36^\circ} - x\right).\tan 36^\circ$

Suy ra $EF = 2EK = 2.\tan 36^\circ.\left(\frac{3}{\tan 36^0} - x\right)$

Diện tích tam giác CEF: $S = \frac{1}{2}.EF.CK = \tan 36^\circ.\left(\frac{3}{\tan 36^0} - x\right)^2$

Diện tích đáy khối lăng trụ là $5S = 5.\tan 36^\circ.\left(\frac{3}{\tan 36^0} - x\right)^2$

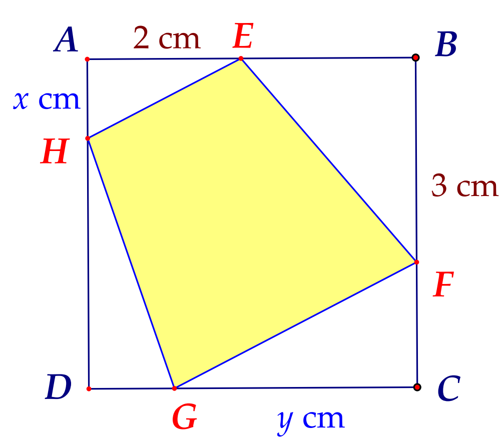
Thể tích khối lăng trụ là $V = 5x.\tan 36^\circ.\left(\frac{3}{\tan 36^\circ} - x\right)^2$ (*)

Xét hàm số $f(x) = x\tan 36^\circ.\left(\frac{3}{\tan 36^0} - x\right)^2 = x^3 - \frac{6}{\tan 36^0}x^2 + \frac{9}{\tan^2 36^0}x$

Có $f'(x) = 3x^2 - \frac{12}{\tan 36^0}x + \frac{9}{\tan^2 36^0} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 4,13 \\ x \approx 1,38 \end{array}\right.$

Thay hai giá trị của x vào (*), ta được thể tích lớn nhất của khối lăng trụ là: $V(1,38) \approx 37,9$.

Câu 20: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất *(làm tròn đến hàng phần trăm)*

Lời giải tham khảo

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \left(S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF} + S_{EBF}\right)$.

Để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có

$S_{AHE} = \frac{1}{2}AE.AH = \frac{1}{2}.2.x = x$; $S_{DHG} = \frac{1}{2}DH.DG = \frac{1}{2}(6-x)(6-y)$; $S_{CGF} = \frac{1}{2}CG.CF = \frac{1}{2}3y$.

Đặt $S = S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ thì $S = \frac{1}{2}(2x+3y+36-6x-6y+xy) = \frac{1}{2}(36+xy-4x-3y)$ (1).

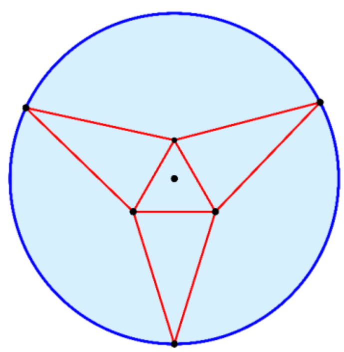
Mặt khác ta lại có $\Delta AEH \backsim \Delta CGF$ $. \Rightarrow \frac{AH}{CF} = \frac{AE}{CG} \Rightarrow xy = 6$. (2).

Thay (2) vào (1) ta có $S = \frac{1}{2}\left[42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)\right] \le \frac{1}{2}\left(42 - 2\sqrt{4x.\frac{18}{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(42 - 12\sqrt{2}\right)$.

Dâu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

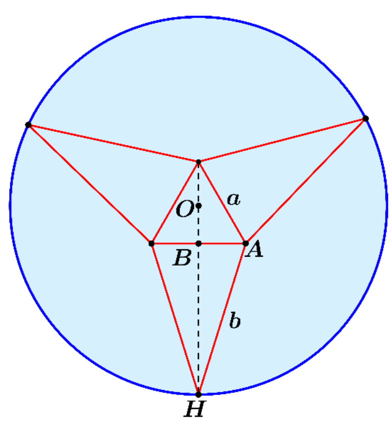
Khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thì $y = 2\sqrt{2}$. Vậy $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95$.

Câu 21: Một miếng bìa hhình tròn tâm O có bán kính bằng 12 cm. Ta cắt tấm bìa như hình vẽ rồi ghép thành hình chóp tam giác đều. Thể tích lớn nhất thu được của khối chóp tam giác bằng bao nhiêu centimet khối (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 214



Ta có: $OB = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow BH = 12 - \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow OH = \sqrt{BH^2 - OB^2} = ... = \sqrt{144 - 4a\sqrt{3}}$

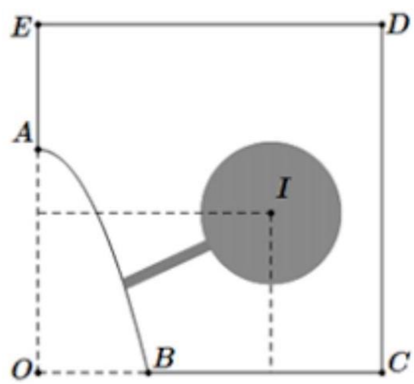
Suy ra thể tích $V = \frac{1}{3}.OH.S_{\Delta} = \frac{1}{3}.\sqrt{144-4a\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ với $0 \le a \le 12\sqrt{3}$.

Xét hàm số $V(a) = \frac{1}{3}.\sqrt{144-4a\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ trên đoạn $\left[0;12\sqrt{3}\right]$

Ta có: $V'(a) = \frac{1}{3}.\frac{-30a^2 + 288a\sqrt{3}}{4\sqrt{144-4a\sqrt{3}}} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \frac{48\sqrt{3}}{5} \in \left[0;12\sqrt{3}\right] \end{array}\right.$ và $V''\left(\frac{48\sqrt{3}}{5}\right) < 0$

Suy ra: $\max V = \max\limits_{\left[0;12\sqrt{3}\right]} V(a) = V\left(\frac{48\sqrt{3}}{5}\right) = \frac{6912\sqrt{15}}{125} \approx 214$

Câu 22: Một cái ao có hình $ABCDE$ tham khảo hình vẽ dưới đây, ở giữa ao có một mảnh vườn trồng hoa hình tròn bán kính 9 m người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O. Bờ AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA. Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 48 m và 20 m, tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 48 m và 30 m. Độ dài ngắn nhất có thể của cây cầu là bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải tham khảo

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O, chiều dương trục hoành là tia OC , chiều dương trục tung là tia OE , đơn vị hai trục là đơn vị độ dài (1 m).

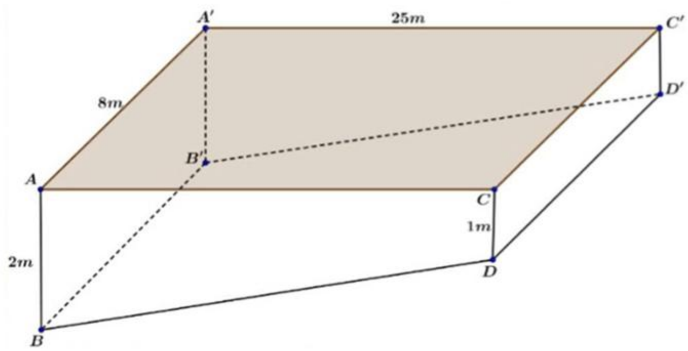
Khi đó ta có phương trình parabol là: $y = \frac{-3}{25}x^2 + 48$ và phương trình đường tròn tâm $I(48;30)$, bán kính $R = 9$ là: $(x-48)^2 + (y-30)^2 = 81$.

Xét điểm $M\left(a;\frac{-3}{25}x^2 + 48\right)$ với $0 \le a \le 20$ nằm trên parabol thì khoảng cách từ đường tròn đến parabol là

$$d = MI - R = \sqrt{(48-a)^2 + \left(\frac{-3}{25}a^2 + 48 - 30\right)^2} - 9$$

Khảo sát hàm số ta tìm được khoảng cách ngắn nhất xấp xỉ: $25,2(\text{m})$.

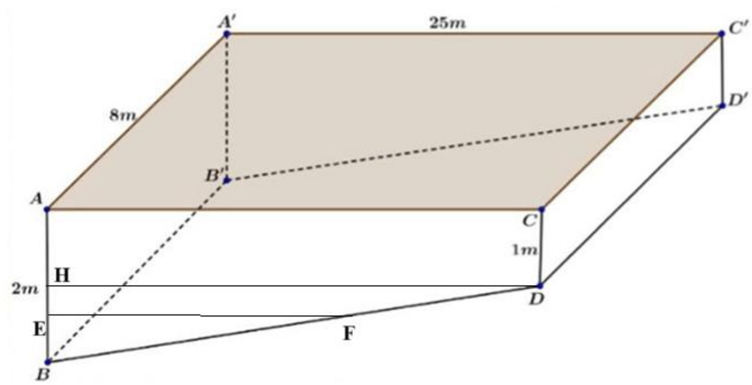
Câu 23: Mặt bể bơi của một chung cư cao cấp có dạng một hình chữ nhật với chiều dài 25m và chiều rộng 8m. Bể bơi sâu 1m ở bên đầu nông và sâu 2m bên đầu sâu, Biết hai đầu nông , sâu thuộc hai mặt bên theo chiều dài bể bơi (tham khảo hình vẽ minh hoạ). Ban đầu bể bơi không có nước, nước bắt đầu được bơm vào bể bơi lúc 7h sáng với tốc độ $1m^3$ / phút, vào lúc 7h 36 phút sáng thì mực nước dâng lên với tốc độ $\frac{1}{a}$ (mét/phút). Giá trị của a bằng bao nhiêu?

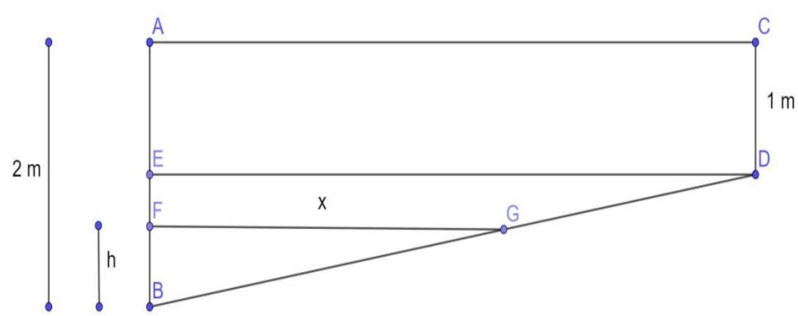


Lời giải tham khảo

Đáp số: 120

Ta thấy:





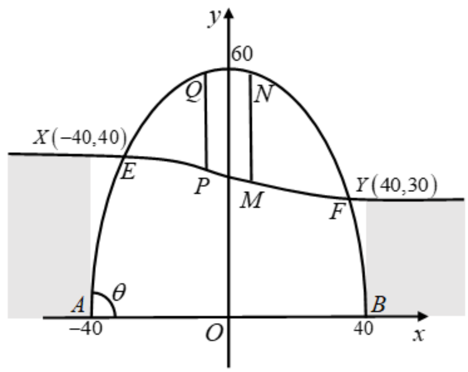
Đặt chiều cao $BE = h(t)$ theo định lý Ta let ta có $\frac{BE}{BH} = \frac{EF}{HD} \Rightarrow EF = BE.25$.

Khi đó: $S_{BEF} = \frac{1}{2}.BE.EF = \frac{25}{2}.BE^2$

Mà thể tích nước bơm vào sau t phút là: $t\left(m^3\right)=S_{BEF}.8\Rightarrow \frac{25}{2}.BE^2.8=t\Rightarrow BE=h(t)=\frac{\sqrt{t}}{10}$

Vậy tốc độ mực nước dâng lên là $v(t)=h'(t)=\frac{1}{20\sqrt{t}}$, thay $t=36\Rightarrow v=\frac{1}{120}\Rightarrow a=120$.

Câu 24: Thành phố A dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Mô hình thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới. Cây cầu XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y=\frac{1}{25600}x^3+ax+b$ với a,b là các số thực. Hai cáp treo MN,PQ (cùng song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và cầu XY. Tổng độ dài hai đoạn cáp treo dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng chục của đơn vị mét)? Biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua trục Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất.



Lời giải tham khảo

Trả lời: 49,5

Ta có parabol có đỉnh là điểm $(0;60)$ nên có pt là $y=cx^2+60$. Và parabol đi qua điểm $(40;0)$ nên $c=-\frac{3}{80}$. Vậy pt của parabol là $y=-\frac{3}{80}x^2+60$.

Vì $X(-40;40),Y(40;30)$ nên ta có hpt: $\begin{cases}40=-\frac{5}{2}-40a+b\\30=\frac{5}{2}+40a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{16}\\b=35\end{cases}$. Vậy pt của cầu XY là $y=\frac{1}{25600}x^3-\frac{3}{16}x+35$.

Gọi $M\left(x;\frac{1}{25600}x^3-\frac{3}{16}x+35\right)$ và $N\left(x;-\frac{3}{80}x^2+60\right)\left(0\le x\le 40\right)$.

Suy ra $MN=-\frac{3}{80}x^2+60-\frac{1}{25600}x^3+\frac{3}{16}x-35=-\frac{1}{25600}x^3-\frac{3}{80}x^2+\frac{3}{16}x+25$.

Vì $MN\ge 0$ nên $0\le x\le 27,9962579$ và GTLN của MN bằng 25,2337682 khi $x=2,490309932$.

N và Q là hai điểm đối xứng qua trục $Oy \Rightarrow N\left(-x;-\frac{3}{80}x^2+60\right) \Rightarrow P\left(-x;\frac{1}{25600}x^3-\frac{3}{16}x+35\right)$.

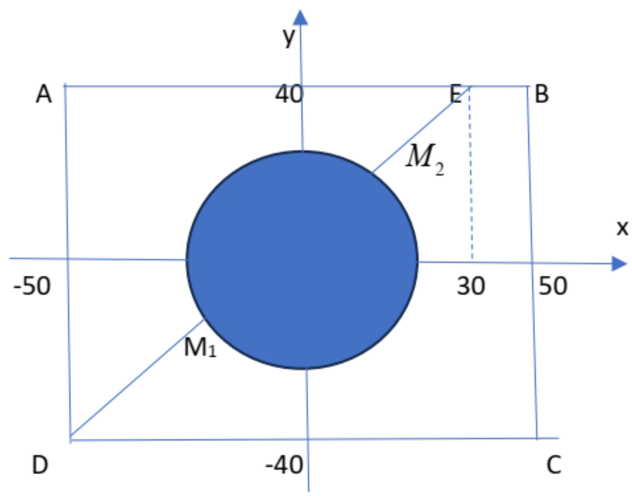
Khi đó $PQ=-\frac{1}{25600}x^3-\frac{3}{80}x^2+\frac{3}{16}x+25$ ứng với $x=-2,490309932$ hay $PQ=24,30110854$.

Vậy tổng độ dài hai đoạn cáp treo bằng 49,5 m.

Câu 25: Trên sân vận động, người ta tổ chức một cuộc thi chạy thông minh. Sân vận động là hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB=100m$ và $CD=80m$. Ở chính giữa sân người ta vẽ một hình tròn có tâm trùng với tâm của hình chữ nhật, bán kính bằng 25m như hình vẽ. Lấy E là một vị trí trên cạnh AB sao cho $EB=20m$. Mỗi vận động viên cần xuất phát từ một điểm M trên đường tròn và chạy theo cung đường $MDCBEMD$. Vận động viên thắng cuộc là người chạy với quãng đường ngắn nhất. Tính độ dài quãng đường ngắn nhất vận động viên phải chạy(đơn vị m, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải tham khảo

Trả lời: 352



Tổng quãng đường đi của vận động viên là $S=MD+DC+CB+BE+EM+MD=2MD+ME+200$

Gắn hệ trục toạ độ gốc O.

Khi đó $E(30;40), D(-50;-40)$. Phương trình đường tròn (C) là $x^2+y^2=25^2=625$

$$ME=\sqrt{(x-30)^2+(y-40)^2}=\sqrt{x^2+y^2-60x-80y+1875+625}$$

$$=\sqrt{4x^2+4y^2-60x-80y+625}=2\sqrt{\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+(y-10)^2}=2MF \quad \text{với } F\left(\frac{15}{2};10\right)$$

Vậy $S=2(MD+MF)+200$ mà D nằm ngoài đường tròn (C) còn F nằm bên trong đường tròn (C) nên $MD+MF\ge DF$, dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đoạn DF với đường tròn (C)

Ta có $DF=\frac{5\sqrt{929}}{2}$ nên $S\ge 5\sqrt{929}+200\simeq 352$

Câu 26: Một công ty xây dựng một nhà máy mới có chi phí 225 tỷ đồng. Chi phí sản xuất x nghìn sản phẩm mỗi năm tại nhà máy này là $0,5x^2+2x+6$ tỷ đồng. Khi nhà máy đã được xây dựng, công ty sẽ sản xuất sản phẩm ở số lượng sao cho lợi nhuận lớn nhất. Giá bán sản phẩm trong năm đầu là 10 triệu đồng, và mỗi năm tiếp theo, giá tăng thêm 1 triệu đồng so với năm ngay trước đó. Hỏi sau bao nhiêu năm việc xây dựng nhà máy mới, công ty sẽ hoàn vốn?

Lời giải

Trả lời: 5

Trước hết ta gọi p là giá bán sản phẩm (triệu đồng)

Lợi nhuận mỗi năm của công ty là $P(x)=R(x)-C(x)=xp(x)-\left(0,5x^2+2x+6\right)$

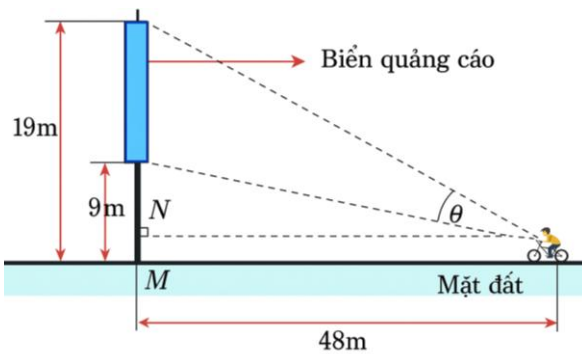
Suy ra $P(x)=-0,5x^2+(p-2)x-6$ là tam thức bậc 2 max tại $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2-p}{2(-0,5)}=p-2$ và lợi nhuận lớn nhất là $\dfrac{(p-2)^2}{2}-6$ (tỷ đồng)

Năm 1 giá bán sản phẩm là $p=10$ triệu đồng

Năm 2 giá bán sản phẩm là $p=10+1=11$ triệu đồng … năm n giá bán sản phẩm là: $p=10+(n-1)=n+9$ triệu đồng

Vậy công ty hoàn vốn khi lợi nhuận = chi phí $\Leftrightarrow \sum_{p=10}^{n+9}\left[\dfrac{(p-2)^2}{2}-6\right]=225 \Rightarrow n=\boxed{5}$

Câu 27: Một tấm biển quảng cáo lớn hình chữ nhật được treo dọc trên mặt tiền của một trung tâm thương mại. Mép dưới của biển quảng cáo cách mặt đất $9\,(\text{m})$, mép trên của biển cách mặt đất $19\,(\text{m})$. Một người đi xe đạp di chuyển thẳng hướng về phía tòa nhà với phương trình chuyển động là $s(t)=t^2+2t$ (mét), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu quan sát. Giả sử rằng mắt quan sát của người đi xe đạp luôn cách mặt đất là $1\,(\text{m})$ trong suốt quá trình di chuyển, tức $MN=1\,(\text{m})$. Biết rằng tại thời điểm $t=0$, người đó cách tòa nhà $48\,(\text{m})$. Biết tốc độ thay đổi của góc nhìn θ (rad/s) tại thời điểm $t=4$ giây là k. Khi đó giá trị của $100k$ bằng bao nhiêu?



Lời giải tham khảo

Trả lời: 7,5

Gọi $x(t)$à khoảng cách theo phương ngang từ mắt người quan sát đến mặt tường tòa nhà tại thời điểm t thì khoảng cách còn lại là: $x(t)=48-\left(t^2+2t\right)$

Suy ra, tốc độ thay đôi khoảng cách: $x'(t)=-2t-2$

Tại thời điểm $t=4$ thì hoảng cách: $x(4)=48-\left(4^2+2.4\right)=24\,(\text{m})$

Tốc độ: $x'(4) = -2\cdot 4 - 2 = -10\,(\text{m/s})$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của mắt người lên tường thì $EH = x$
Độ cao từ mắt đến mép dưới biển (đoạn HA): $9-1=8\,(\text{m})$
Độ cao từ mắt đến mép trên biển (đoạn HB): $19-1=18\,(\text{m})$

Gọi $\alpha = HEA$ và $\beta = HEB$. Ta có $\tan\alpha = \dfrac{8}{x}$ và $\tan\beta = \dfrac{18}{x}$

Góc nhìn biển quảng cáo là $\theta(t) = \beta - \alpha$

Suy ra: $\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha} = \dfrac{\dfrac{18}{x}-\dfrac{8}{x}}{1+\dfrac{18}{x}\cdot\dfrac{8}{x}} = \dfrac{10x}{x^2+144}$ (1)

Xem θ và x đều là các hàm số phụ thuộc vào t. Đạo hàm hai vế ta được :

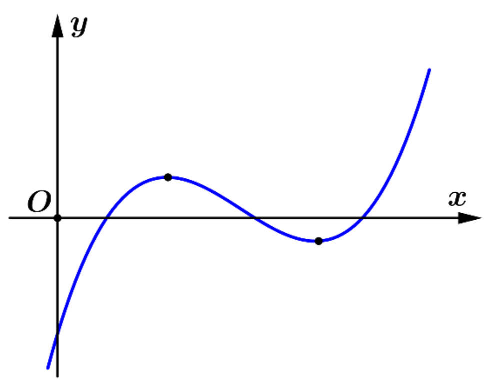
$$(\tan\theta)' = \left(\frac{10x}{x^2+144}\right)' \Leftrightarrow \theta'(t).\left(1+\tan^2\theta\right) = \frac{(10x)'\left(x^2+144\right) - 10x.\left(x^2+144\right)'}{\left(x^2+144\right)^2}$$

$$\theta'(t).\left(1+\tan^2\theta\right) = \frac{10.x'(t).\left(x^2+144\right) - 10x.2x.x'(t)}{\left(x^2+144\right)^2} \Leftrightarrow \theta'(t).\left(1+\tan^2\theta\right) = \frac{1440-10x^2}{\left(x^2+144\right)^2}.x'(t)\,(*)$$

Tại $t=4$, ta đã biết $x=24$ và $x'=10$. Thay vào $(1) \Leftrightarrow \tan\theta = \dfrac{10\cdot 24}{24^2+144} = \dfrac{1}{3}(2)$

Thay (2) vào $(*) \Leftrightarrow k.\left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right] = \dfrac{1440-10.24^2}{\left(24^2+144\right)^2}.(-10) \Rightarrow k = 0,075$. Vậy giá trị $100k = \boxed{7,5}$

Câu 28: Một nhà sản xuất sử dụng mô hình toán học để thiết kế một dòng ghế ngã lưng thư giãn cao cấp. Hình dáng của mặt ghế được mô tả bằng đồ thị của hàm số: $y = f(x) = \dfrac{2}{3}a^2x^3 - 4ax^2 + 6x - \dfrac{1}{a}\ (a>0)$



Trong đó một đơn vị trên trục ứng với $10\,\text{cm}$ ngoài thực tế. Tiêu chí quan trọng của sự thoải mái là chiều dài đùi của người sử dụng phải vừa vặn với khoảng cách theo phương ngang giữa điểm lồi cao nhất và điểm lõm thấp nhất của mặt ghế. Ngoài ra, để mang lại cảm giác ngồi chắc chắn và an toàn cho người dùng thì độ sâu lòng ghế (khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhật của mặt ghế) phải bằng $40\,\text{cm}$. Hỏi chiếc ghế được sản suất ra sẽ phù hợp nhất với người có chiều dài đùi là bao nhiêu centimet?

Lời giải tham khảo

Trả lời: 30

Đạo hàm của hàm số $f(x)$: $f'(x) = 2a^2x^2 - 8ax + 6 = a^2x^2 - 4ax + 3 = 0$

Đặt $t = ax$, ta có phương trình mới: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 3 \end{array}\right.$. Vì $a > 0$ nên ta có được hoành độ của hai điểm cực trị là:

Điểm cực đại là điểm lồi cao nhất: $x_1 = \frac{1}{a}$

Điểm cực tiểu là điểm lõm thấp nhất: $x_2 = \frac{3}{a}$

Tại $x_1 = \frac{1}{a}$: $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{3}a^2\left(\frac{1}{a^3}\right) - 4a\left(\frac{1}{a^2}\right) + 6\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} = \frac{2}{3a} - \frac{4}{a} + \frac{6}{a} - \frac{1}{a} = \frac{5}{3a}$

Tại $x_2 = \frac{3}{a}$: $f\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{2}{3}a^2\left(\frac{27}{a^3}\right) - 4a\left(\frac{9}{a^2}\right) + 6\left(\frac{3}{a}\right) - \frac{1}{a} = \frac{18}{a} - \frac{36}{a} + \frac{18}{a} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$

Khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa hai điểm này là: $\Delta y = f\left(\frac{1}{a}\right) - f\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{5}{3a} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{8}{3a}$

Theo đề bài, độ sau lòng ghế là 40 cm.

Vì 1đơn vị $= 10$ cm, nên độ sâu tương ứng trên đồ thị là 4 đơn vị: $\frac{8}{3a} = 4 \Rightarrow a = \frac{2}{3}(1)$

Khoảng cách theo phương ngang giữa hai điểm cực trị là: $\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{3}{a} - \frac{1}{a} = \frac{2}{a}(2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $\Delta x = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$ (đơn vị) nên chiều dài thực tế là: $3.10 = 30$ cm

Vậy chiếc ghế được sản xuất sẽ phù hợp nhất với người có chiều dài đùi là $\boxed{30}$ cm

Câu 29: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 500)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{200000x}{3x+2}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng), nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 2% cho 180 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 3% cho các sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải tham khảo

Hàm doanh thu: $F(x) = -x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$

Hàm chi phí vận hành máy móc mỗi sản phẩm: $G(x) = \frac{200000x}{3x+2}$

Hàm tổng chi phí mua nguyên vật liệu (trước giảm giá): $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$

Tổng chi phí vận hành máy móc cho x sản phẩm: $x.G(x) = \frac{200000x^2}{3x+2}$

Hàm lợi nhuận của doanh nghiệp:

+ Nếu $1 \le x \le 180$: $L(x) = F(x) - x.G(x) - 0,98.H(x)$

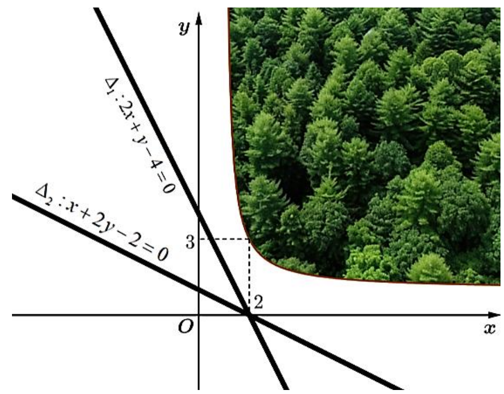
$$= -x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{200000x^2}{3x+2} - 0,98\left(2x^3 + 100000x - 50000\right)$$

+ Nếu $180 < x \le 500$: $L(x) = F(x) - x.G(x) - 0,98.H(180) - 0,97.H(x-180)$

$$= -x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - \frac{200000x^2}{3x+2} - 29021720 - 0,97.\left[2(x-180)^3 + 100000(x-180) - 50000\right]$$

Sử dụng máy tính cầm tay, tìm được giá trị lớn nhất của hàm số $L(x)$. Ta có doanh nghiệp thu được lợi nhuận lớn nhất khi $x = 185$ (sản phẩm)

Câu 30: Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong (*C*): $y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ *Oxy* thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (*C*) đi qua điểm $(2;\,3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0;\, y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí *M* đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm *M* là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải tham khảo

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -b = 1 \Rightarrow b = -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ qua $(2;\,3) \Rightarrow 3 = \frac{2+a}{2-1} \Rightarrow a = 1$; hàm số là $\boxed{y = \frac{x+1}{x-1}}$ (*C*).

Gọi $M\left(x_0;\, \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$, $x_0 > 1$. Tổng khoảng cách từ *M* đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$d = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = \frac{\left|2x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + 2\cdot\frac{x_0+1}{x_0-1} - 2\right|}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{5}d = \left|\frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1}\right| + \left|\frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1}\right| = \frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1} + \frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1} \quad \left(\text{vì } \begin{cases} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 > 0 \\ x_0 - 1 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \end{cases}, \forall x_0 > 1\right).$$

Đặt $\sqrt{5}d = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 9}{x_0 - 1} = g(x)$ với $x > 1$.

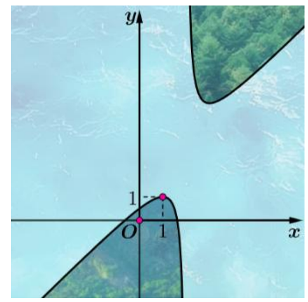
Ta có: $g'(x) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2} > 1$.

Ta có: $\min\limits_{(1;\,+\infty)} g(x) = g\left(1+\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5}d \ge 6\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d \ge \dfrac{6\sqrt{10}}{5}}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_0 = 1+\sqrt{2} \Rightarrow M\left(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Khoảng cách OM trên thực tế là $10\times\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = 10\times\left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{2} \approx \boxed{34{,}1}$ mét.

Câu 31: Hình dáng phần đất liền của hai xã thuộc tỉnh Đồng Tháp được mô hình hóa bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$; biết đồ thị có một điểm cực trị là $(1; 1)$, với hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét. Để thuận tiện cho giao thông hai xã, lãnh đạo tỉnh đã phê duyệt dự án xây một chiếc cầu nối phần đất liền của hai xã này. Nhằm tiết kiệm chi phí cho công trình, người kỹ sư trưởng thiết kế có nhiệm vụ nghiên cứu để chọn được hai vị trí A, B trên phần đất liền hai xã sao cho độ dài chiếc cầu (đoạn AB) là ngắn nhất có thể. Hỏi độ dài ngắn nhất của chiếc cầu đó (tính theo đường chim bay) là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải tham khảo

Ta có $y' = \dfrac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$. Vì $(1; 1)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số nên $\begin{cases} y(1)=1 \\ y'(1)=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+a+b}{1-2}=1 \\ 1^2-4\cdot1-2a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Hàm số trở thành $y = \dfrac{x^2-x-1}{x-2} = x+1+\dfrac{1}{x-2}$, $x \ne 2$.

Gọi $A\left(2+a; 3+a+\dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(2-b; 3-b-\dfrac{1}{b}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh đồ thị với $a, b > 0$. Ta có:

$$AB^2 = (a+b)^2+\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2+\left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2 = (a+b)^2\left[1+\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\right]$$

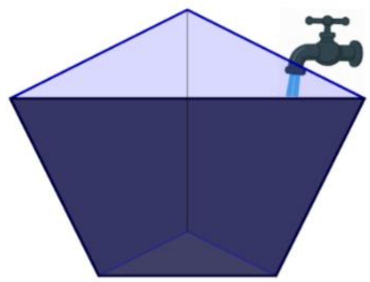
$$= (a+b)^2\left(2+\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}\right) \overset{AM-GM}{\ge} 4ab\left(2+\frac{2}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}\right) = 8+8ab+\frac{4}{ab} \overset{AM-GM}{\ge} 8+8\sqrt{2}.$$

Độ dài ngắn nhất của cây cầu (theo đường chim bay) là $AB\times10 = \sqrt{8+8\sqrt{2}}\times10 \approx \boxed{43{,}9}\ m$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$ và $8ab = \dfrac{4}{ab} \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

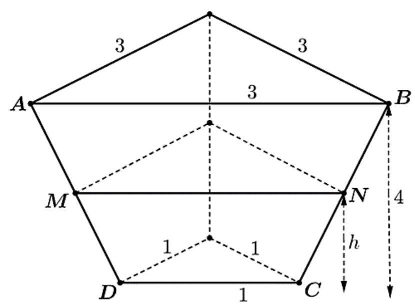
Câu 32: Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác cạnh bằng 1 *dm* và 3 *dm*. Chiều cao chậu nước bằng 4 *dm*. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi 0,5 lít/phút. Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước trong chậu là bao nhiêu *dm*/phút? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Lời giải tham khảo

Đáp số: 0,17



Gọi MN là độ dài cạnh tam giác đều theo mực nước tức thời (MN thay đổi).

Đặt $MN = a \times h + b$ (hàm số bậc nhất theo h).

Khi $h = 0$ thì $MN = 1$; khi $h = 4$ thì $MN = 3$.

Do đó $\begin{cases} b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; suy ra $\boxed{MN = \dfrac{1}{2}h + 1}$.

Diện tích mặt nước tức thời là $S = \dfrac{MN^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(0,5h+1)^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích nước tức thời là $V = \dfrac{1}{3}h\left(S_0 + \sqrt{S_0 S} + S\right)$; S_0 là diện tích mặt nước ban đầu (đáy nhỏ).

$$V = \frac{1}{3}h\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(0,5h+1)^2\sqrt{3}}{4}} + \frac{(0,5h+1)^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{h\sqrt{3}}{12}\left[1 + (1+0,5h) + (1+0,5h)^2\right].$$

$$V = \frac{h\sqrt{3}}{12}\left(0,25h^2 + 1,5h + 3\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(0,25h^3 + 1,5h^2 + 3h\right) \quad (*).$$

Sau 10 phút thì lượng nước trong chậu là $V = 0,5 \times 10 = 5\ dm^3$.

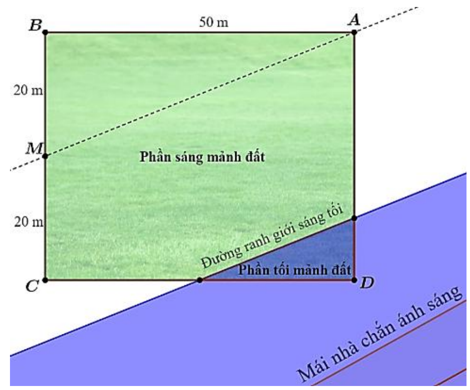
Do đó $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(0,25h^3 + 1,5h^2 + 3h\right) = 5 \Rightarrow h \approx 3,27\ dm$ (***Lưu vào A***).

Từ (*) đạo hàm hai vế theo t ta được: $\boxed{\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(0,75h^2 + 3h + 3\right)\cdot\dfrac{dh}{dt}}$ $(**)$.

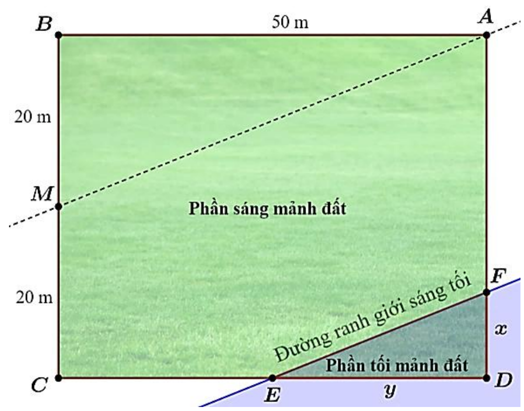
Thay các giá trị $h = A;\ V = 5;\ \frac{dV}{dt} = 0,5$ vào (**) ta được: $\boxed{\frac{dh}{dt} \approx 0,17}$ dm/phút.

Vậy tốc độ dâng lên của nước trong chậu xấp xỉ 0,17 dm/phút.

Câu 33: Một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước $40\,m \times 50\,m$ đang được người chủ trồng cỏ tự nhiên. Vào buổi sáng, khi mặt trời vừa lên, mảnh đất này bị một mái nhà xưởng gần đó chắn ánh sáng. Khi mặt trời lên cao hơn, ánh sáng đã chiếu từ từ lên mảnh đất. Ta xem ranh giới giữa phần được chiếu sáng và phần tối là các đường thẳng song song thay đổi. Có thời điểm đường ranh giới này đi qua hai điểm A, M như hình vẽ (M là trung điểm một cạnh hình chữ nhật). Khi diện tích phần tối của mảnh đất bằng $75\ m^2$, người ta đo được tốc độ giảm cạnh theo phương AD bằng 2 cm/s; hỏi tốc độ giảm diện tích phần tối của mảnh đất là bao nhiêu cm^2/s? Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục.



Lời giải tham khảo



Xét tam giác ABM vuông tại B có $\tan BAM = \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5}$.

Đặt $x = DF \in [0;\ 40]$, $y = DE \in [0;\ 50]$ (x, y thay đổi (giảm) vì ánh sáng ngày càng lan rộng).

Vì $EF // AM$ nên $\tan FED = \tan BAM \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{5x}{2}}$.

Diện tích phần tối tức thời là $S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \cdot \frac{5x}{2}$ hay $\boxed{S = \frac{5}{4}x^2}$ (1).

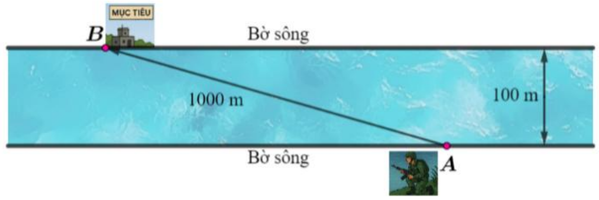
Khi diện tích phần tối bằng $75\ m^2$ thì $\frac{5}{4}x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 60 \Rightarrow x = 2\sqrt{15}\ m$.

Đạo hàm hai vế của (1) theo biến t ta được: $\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{5}{2}x \cdot \frac{dx}{dt}}$ (2).

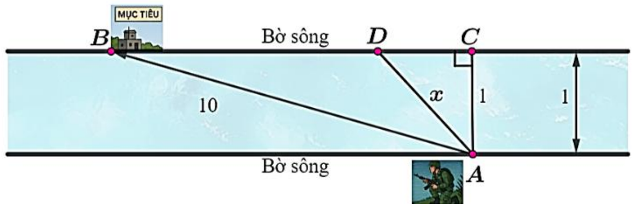
Thay $x = 2\sqrt{15}\ m = 200\sqrt{15}\ cm$ và $\frac{dx}{dt} = 2\ cm/s$ vào (2), ta được $\frac{dS}{dt} \approx \boxed{3873}\ cm^2/s$.

Câu 34: Một chiến sĩ đặc công đang nấp ở bờ sông, cần phải bơi qua bờ bên kia để tấn công mục tiêu. Có thể xem con sông này là thẳng và có độ rộng 100 m; vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy bộ.

Biết rằng mục tiêu tấn công cách chiến sĩ 1 *km* theo đường chim bay; hỏi chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải tham khảo



Gọi C là hình chiếu vuông góc của A (vị trí chiến sĩ xuất phát) đối với bờ bên kia và D thuộc đoạn BC là vị trí mà chiến sĩ sẽ bơi đến trước khi chạy bộ tấn công mục tiêu tại A.

Ta chuẩn hóa bài toán như sau:

+) đơn vị độ dài = 100 m; khi đó $AC = 1,\ AB = 10$.

+) Vận tốc bơi trên sông của chiến sĩ là 1 (đơn vị vận tốc); vận tốc chạy của chiến sĩ là 3 (đơn vị vận tốc).

Đặt $AD = x \in (1; 10) \Rightarrow CD = \sqrt{x^2 - 1}$; $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 3\sqrt{11}$; $BD = BC - CD = 3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}$.

Tổng thời gian từ khi chiến sĩ xuất phát đến khi tiếp cận mục tiêu là:

$$t = \frac{AD}{1} + \frac{BD}{3} = \frac{x}{1} + \frac{3\sqrt{11} - \sqrt{x^2 - 1}}{3} = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{11} - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 - 1} + x$; $x \in (1; 10)$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 3 \Rightarrow 3\sqrt{x^2 - 1} = x \Rightarrow 9x^2 - 9 = x^2 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 0.$$

<u>Bảng biến thiên:</u>

x	1		$\frac{3\sqrt{2}}{4}$		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Chiến sĩ tiếp cận mục tiêu nhanh nhất khi $BD = x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Do đó chiến sỹ phải bơi một đoạn

$$AD \times 100 = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times 100 \approx \boxed{106\ m}.$$

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 35: Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều quần thể đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống; trong số đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét, đường cong mô tả cho hòn đảo thứ nhất có dạng $y=\log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3;1)$.

a) Điểm có tọa độ $(9;3)$ thuộc đường cong $y=\log_a x$.

b) (TP)Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống...Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); diện tích khu vực này là $536\ m^2$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư rất giỏi toán (***đặc biệt giỏi về hàm số mũ-log***) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y=g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y=\log_a x$ qua đường thẳng $y=x+1$. Khi đó đường cong $g(x)=1+3\cdot3^x$.

d) Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai hòn đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

Lời giải tham khảo

a) Mệnh đề sai.

Đường cong $y=\log_a x$ đi qua điểm $(3;1)$ nên $1=\log_a 3 \Rightarrow a=3$.

Khi đó hàm số trở thành $y=\log_3 x$; đường cong này không đi qua điểm $(9;3)$.

b) Mệnh đề sai.

Điểm $A(x_A;-1)$ thuộc đồ thị hàm só $y=\log_3 x \Rightarrow \log_3 x=-1 \Rightarrow x=3^{-x}=\dfrac{1}{3}$.

Diện tích tam giác cong ABC là phần hình phẳng được giới hạn bởi hai đồ thị $y=\log_3 x$; $y=-1$ cùng các đường thẳng $x=\dfrac{1}{3}$; $x=4$.

Do đó diện tích cần tính là $S=100\times\displaystyle\int_{1/3}^{4}\left|\log_3 x-(-1)\right|\mathrm{d}x \approx 571\ m^2$.

c) Mệnh đề đúng.

Gọi $M(x_M;y_M)\in(C_1): y=\log_3 x$ và $N(x;y)\in(C_2): y=g(x)$.

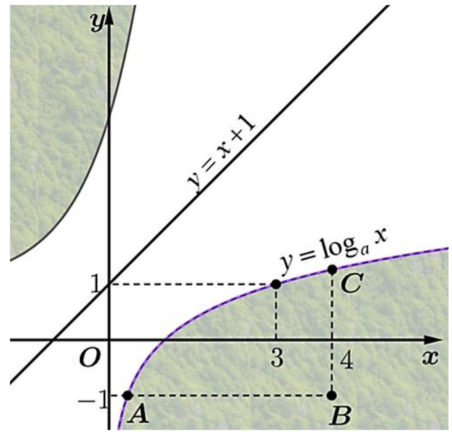
M, N đối xứng qua $x-y+1=0$ nên ta có: $\begin{cases} \dfrac{x+x_M}{2}-\dfrac{y+y_M}{2}+1=0 \\ 1\cdot(x-x_M)+1\cdot(y-y_M)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+x_M-y_M+2=0 \\ x+y-x_M-y_M=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_M=x+1 \\ x_M=y-1 \end{cases}$ hay $\boxed{M(y-1;\, x+1)}$.

Vì $M\in(C_1)$ nên $x+1=\log_3(y-1)\Rightarrow y-1=3^{x+1}\Rightarrow y=3^{x+1}+1$ hay $\boxed{y=g(x)=1+3\cdot 3^x}$.

d) Mệnh đề sai.

Xét tiếp tuyến của đường cong $y=\log_3 x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=x+1$.



Hệ số góc tiếp tuyến là $k=1$; gọi $M(x_0\,;\,y_0)$ là tiếp điểm thì

$f'(x_0)=k\Rightarrow \dfrac{1}{x_0\ln 3}=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{\ln 3};\ y_0=\log_3\dfrac{1}{\ln 3}$.

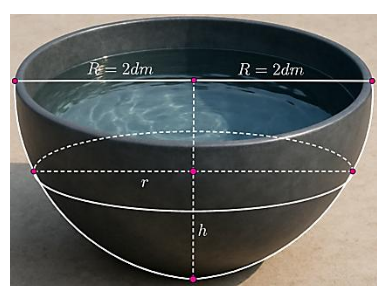
Độ dài ngắn nhất cây cầu (theo đường chim bay) bằng hai lần khoảng cách từ $M\left(\dfrac{1}{\ln 3};\log_3\dfrac{1}{\ln 3}\right)$ đến đường thẳng $y=x+1$.

Ta có: $d_{\min}=2\cdot\dfrac{\left|\dfrac{1}{\ln 3}-\log_3\dfrac{1}{\ln 3}+1\right|}{\sqrt{2}}\times 100\approx\boxed{282\ m}$.

Câu 36: Một cái chậu đựng nước hình bán cầu có bán kính bằng 2 *dm*. Người ta đặt một ống nhựa và cho nước vào chậu với lưu lượng nước không đổi bằng 0,3 *lít/phút*. Đến phút thứ 6, tốc độ dâng lên của nước trong chậu bằng bao nhiêu *dm/phút* (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải tham khảo

Sau 6 phút bơm nước thì thể tích trong bát bằng $6\times 0,3=1,8$ *lít*.



Gọi h là chiều cao tức thời của mực nước trong chậu, thể tích nước tương ứng chiều cao h được tính theo công thức thể tích chỏm cầu $V=\dfrac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$;

trong đó $R=2\ dm$ nên $\boxed{V=\dfrac{1}{3}\pi h^2(6-h)=2\pi h^2-\dfrac{1}{3}\pi h^3}$ (1).

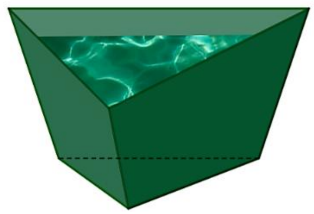
Xét $V=1{,}8 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi h^2\left(3\cdot 2-h\right)=1{,}8 \Rightarrow h\approx 0{,}56\ dm$ (***lưu vào A***).

Đạo hàm hai vế của (1) theo *t*, ta được: $\boxed{\frac{dV}{dt}=(4\pi h-\pi h^2)\frac{dh}{dt}}$ (2).

Thay $\frac{dV}{dt}=0{,}3\ dm^3/phút$; $h=A\approx 0{,}56\ dm$ vào (2), ta được: $\frac{dh}{dt}\approx 0{,}05\ dm/phút$.

Vậy tốc độ dâng lên của nước là khoảng 0,05 *dm/phút*.

Câu 37: Một cái chậu nước có dạng hình chóp cụt đều với các cạnh đáy lần lượt bằng 6 *dm* và 3 *dm*, chiều cao chậu nước bằng 4 *dm*. Người ta bơm nước vào chậu với tốc độ 0,4 *lít/phút*.



a) Dung tích của chậu nước bằng $21\sqrt{3}\ dm^3$.

b) Nếu người ta giữ nguyên tốc độ bơm nước thì sau 91 *phút* (làm tròn đến hàng đơn vị) bể sẽ đầy.

c) Khi mực nước trong chậu có chiều cao *h* thì thể tích nước trong chậu được tính theo công thức
$V=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{9}{8}h^3+\frac{9}{4}h^2+27h\right)$ *lít*.

d) Khi nước được bơm đến phút thứ 8 thì tốc độ dâng lên của nước trong chậu bằng 0,05 *dm/phút* (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải tham khảo

a) Mệnh đề đúng.

Thể tích chậu nước $V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$; trong đó $h=4\ dm$ và diện tích hai đáy lần lượt là

$S_1=\frac{3^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\ dm^2$; $S_2=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\ dm^2$.

Do đó $V=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 9\sqrt{3}}+9\sqrt{3}\right)=21\sqrt{3}\ dm^3$.

b) Mệnh đề đúng.

Bể đầy nước sau khoảng thời gian $t=\frac{21\sqrt{3}}{0{,}4}\approx 91\ phút$.

c) Mệnh đề sai.

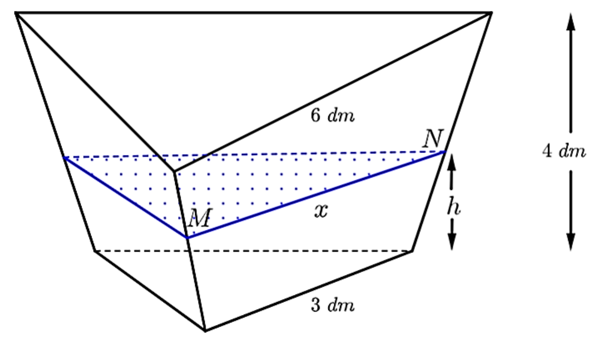
Thể tích nước tương ứng chiều cao *h* là:

$$V=\frac{1}{3}h\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{x^2\sqrt{3}}{4}+\sqrt{\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}}\right)=\frac{1}{3}h\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}+\frac{3\sqrt{3}x}{4}\right)\ (1).$$

Gọi $x = MN$ là đường mép nước ứng với một mặt bên chậu, chiều cao mực nước là h.

Ta có: $x = ah + b$ (hàm số bậc nhất).

Vì $x = 3;\ h = 0$ và $x = 6;\ h = 4$ suy ra



$$\begin{cases} b = 3 \\ 4a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases} \text{ hay } \boxed{x = \dfrac{3}{4}h + 3} \quad (2).$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}h\left(\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}h+3\right)^2}{4} + \frac{3\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}h+3\right)}{4}\right).$$

Thu gọn ta được: $\boxed{V = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{9}{16}h^3 + \dfrac{27}{4}h^2 + 27h\right)}$ (3).

d) Mệnh đề sai.

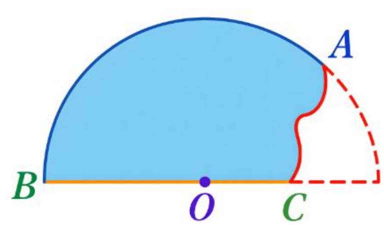
Đến phút thứ 8, mực nước trong chậu là $V(8) = 0,4 \times 8 = 3,2\ dm^3$.

Thay vào (3) ta được $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{9}{16}h^3 + \dfrac{27}{4}h^2 + 27h\right) = 3,2 \Rightarrow h \approx 0,69\ dm$ (***lưu vào A***).

Lấy đạo hàm hai vế (3) theo *t*, ta được: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{27}{16}h^2 + \dfrac{27}{2}h + 27\right)\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}$ (4).

Thay $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0,4$ *dm/phút*; $h \approx 0,69\ dm = A$ vào (4) ta được $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \approx \boxed{0,07}$ *dm/phút.*

Câu 38: Như hình, cho một tấm vật liệu hình nửa đường tròn ABC bán kính 2 (đường kính nằm trên đường thẳng BC), O là tâm nửa đường tròn. Trên đường kính có điểm C sao cho $OC = \dfrac{6}{5}$; phần vật liệu bị khuyết nằm về phía bên phải đường thẳng vuông góc với BC đi qua C. Cắt từ phần vật liệu còn lại một tam giác vuông sao cho có một cạnh nằm trên BC. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác vuông đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



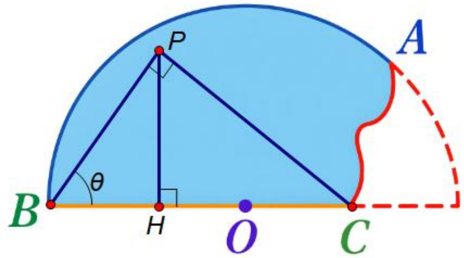
Lời giải

Trả lời: 2,6

Xét hai trường hợp.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

TH1: Cạnh huyền nằm trên BC



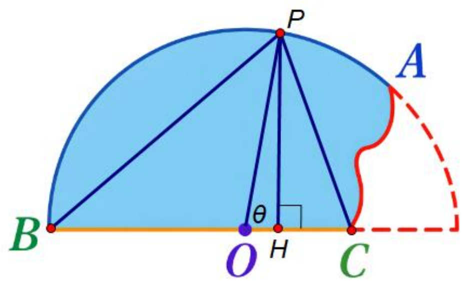
Gọi tam giác vuông là ΔBPC vuông tại P (khi đó BC là cạnh huyền). Đặt $PBC = \theta$, với $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $BC = OB + OC = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5}$.

Suy ra $PB = BC\cos\theta = \frac{16}{5}\cos\theta, \quad PC = BC\sin\theta = \frac{16}{5}\sin\theta$

Diện tích: $S = \frac{1}{2}PB \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5}\cos\theta \cdot \frac{16}{5}\sin\theta = \frac{64}{25}\sin 2\theta \le \frac{64}{25}$. Dấu "=" khi $\theta = \frac{\pi}{4}$. Khi đó $S_{\max,1} = \frac{64}{25}$.

TH2: Một cạnh góc vuông nằm trên BC



Gọi $H \in BC$ sao cho ΔBPH vuông tại H và $PH \perp BC$. Đặt $POH = \theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

vì $OP = 2$ nên $PH = 2\sin\theta, \quad OH = 2\cos\theta$

Mặt khác $BH = OB + OH = 2 + 2\cos\theta$. Do phần vật liệu bị khuyết nằm bên phải đường thẳng qua C, nên cần H nằm bên trái C, tức $OH < OC = \frac{6}{5} \Rightarrow 2\cos\theta < \frac{6}{5} \Rightarrow \cos\theta < \frac{3}{5}$.

Diện tích: $S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot PH = \frac{1}{2}(2 + 2\cos\theta) \cdot 2\sin\theta = 2\sin\theta(1 + \cos\theta)$

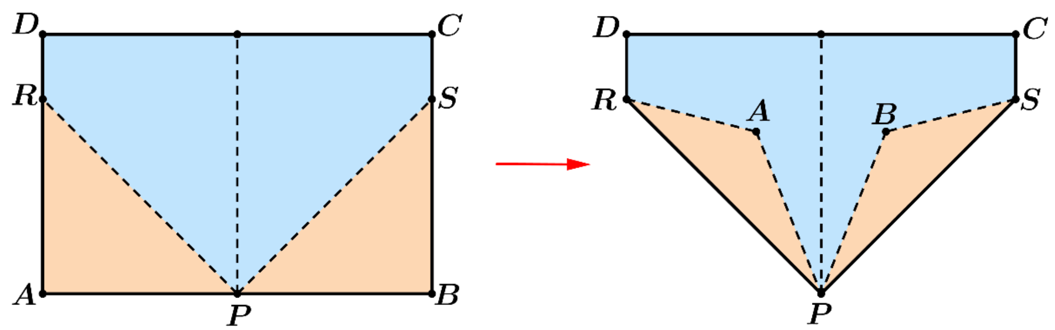
Đạo hàm: $S'(\theta) = 2(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)$

Suy ra $S'(\theta) > 0$ khi $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, và $S'(\theta) < 0$ khi $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vậy $S(\theta)$ đạt cực đại tại $\theta = \frac{\pi}{3}$ (khi đó $\cos\theta = \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$, thỏa điều kiện vật liệu).

Khi $\theta = \frac{\pi}{3}$, $S_{\max,2} = 2\sin\frac{\pi}{3}\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

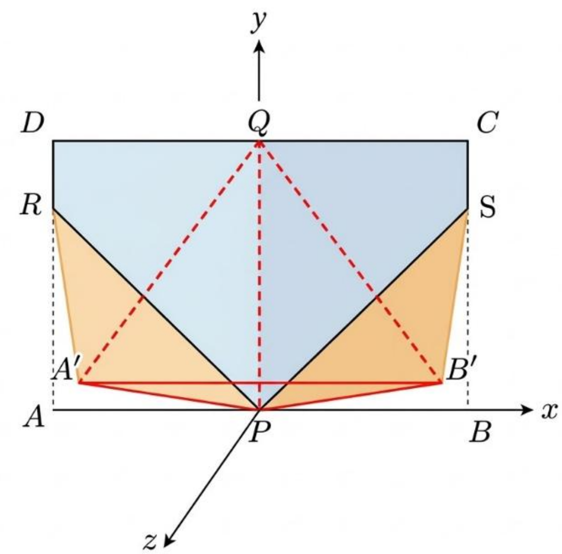
So sánh $\frac{3\sqrt{3}}{2} > \frac{64}{25}$, nên diện tích lớn nhất cần tìm là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 39: Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 18$ cm, $AD = 12$ cm. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Từ P tạo hai nếp gấp $PR\left(R \in AD\right)$ và $PS\left(S \in BC\right)$ sao cho nếu gập phẳng thì hai đoạn PA và PB cùng trùng khít lên đoạn PQ. Tiến hành gập hai ΔAPR và ΔBPS lên không gian sao cho mặt phẳng $\left(APR\right)$ và $\left(BPS\right)$ cùng tạo với mặt phẳng phần giấy cố định $\left(PRQS\right)$ một góc $\theta \in \left(0°;180°\right)$. Khối tứ diện $Q.PAB$ được tạo thành có thể tích đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu cm^3? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:



Tọa độ các điểm: $P\left(0;0;0\right)$, $A\left(-9;0;0\right)$, $B\left(9;0;0\right)$, $Q\left(0;12;0\right)$

Theo đề bài, khi gấp phẳng thì PA trùng với PQ. Điều này có nghĩa là khi gấp, điểm A sẽ di chuyển đến điểm $A'\left(0;9;0\right)$ trên trục Oy (vì $PA = 9$ cm).

Đường nếp gấp PR chính là đường trung trực của đoạn AA' trong mặt phẳng ban đầu.

Trung điểm của AA' là $M\left(-\frac{9}{2};\frac{9}{2};0\right)$

Véctơ $\overrightarrow{AA'} = \left(9;9;0\right)$. Suy ra nếp gấp PR có phương trình là $y = -x$ trong mặt phẳng Oxy.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Khi ta gấp tam giác APR lên một góc θ so với mặt phẳng cố định $(PRQS)$, điểm A sẽ quay quanh trục PR.

Tọa độ của A trong không gian sẽ phụ thuộc vào θ: $A\left(-\frac{9}{2}(1-\cos\theta);\frac{9}{2}(1+\cos\theta);\frac{9\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

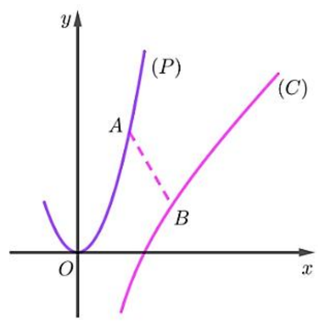
Do tính đối xứng qua $Oy \Rightarrow B\left(\frac{9}{2}(1-\cos\theta);\frac{9}{2}(1+\cos\theta);\frac{9\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

Thể tích khối tứ diện $Q.PAB$ là: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right].\overrightarrow{PQ}\right|=\frac{1}{6}\left|-24x_Az_A\right|=4\left|x_Az_A\right|(*)$

Thay số vào $(*) \Leftrightarrow V(\theta)=4\left|-\frac{9}{2}(1+\cos\theta).\frac{9}{2}\sqrt{2}\sin\theta\right|=81\sqrt{2}\sin\theta(1+\cos\theta)$

$$\frac{d}{dX}\left(81\sqrt{2}\sin\theta(1+\cos\theta)\right)\Big|_{x=x}\xrightarrow{\text{Shift solve}}x=120^\circ\Rightarrow V_{\max}\left(120^\circ\right)=148,806...\approx\boxed{149}$$

Câu 40: Hình vẽ bên mô tả một phần dòng sông với bờ trái là một phần parabol (P): $y=3x^2$ và bờ phải là một phần đường cong (C): $y=\frac{x^2-1}{x}$ với $x>0$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét. Tính từ bờ trái sang bờ phải, khúc hẹp nhất của con sông này là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



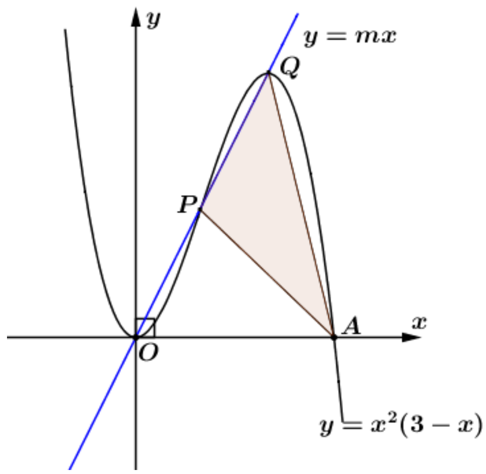
Lời giải tham khảo

$$(P):y=3x^2\Rightarrow A\left(\frac{a^2+1}{6a^2};\frac{\left(a^2+1\right)^2}{12a^4}\right)(C):y=\frac{x^2-1}{x}\Rightarrow B\left(a;\frac{a^2-1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2=\left(\frac{a^2+1}{6a^2}-a\right)^2+\left(\frac{\left(a^2+1\right)^2}{12a^4}-\frac{a^2-1}{a}\right)^2\geq\frac{5}{9}$$

Khi $a=1\Rightarrow AB_{min}=\frac{\sqrt{5}}{3}.1000\approx745(m)$

Câu 41: Như hình vẽ, xét hàm số bậc ba $y=x^2(3-x)$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox. Đường thẳng $y=mx,(m>0)$ cắt đồ thị hàm số trên trong góc phần tư thứ nhất tại hai điểm phân biệt P,Q. Khi đó, hãy tìm giá trị của hằng số m sao cho diện tích tam giác APQ là lớn nhất.

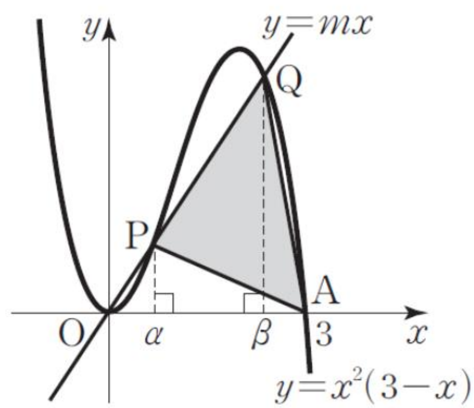


Lời giải tham khảo

Trả lời: 1,5

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2(3-x)$ với đường thẳng $y = mx$ có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2(3-x) = mx \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3x + m\right) = 0.$ Do đó $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + m = 0. \end{array}\right.$

Gọi hoành độ của hai điểm P, Q lần lượt là α, β với $0 < \alpha < \beta$. Khi đó α, β là hai nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 3x + m = 0$.



Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = m.$

Để phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt, ta xét biệt thức $\Delta = 9 - 4m > 0 \Rightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$.

Điểm A có tọa độ $(3;0)$.

Với $P(\alpha; m\alpha), Q(\beta; m\beta)$ và $A(3;0)$, gọi S là diện tích tam giác PAQ. Khi đó

$$S = S_{\Delta OAQ} - S_{\Delta OAP} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot m\beta - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot m\alpha = \frac{3}{2}m(\beta - \alpha).$$

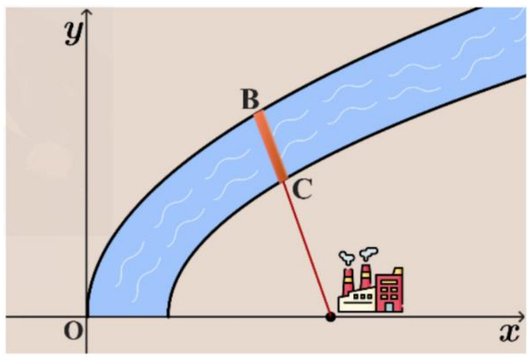
Mặt khác, $\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{9-4m}$. Do đó $S = \frac{3}{2}m\sqrt{9-4m} = \frac{3}{2}\sqrt{-4m^3 + 9m^2}$.

Đặt $f(m) = -4m^3 + 9m^2$. Khi đó $f'(m) = -12m^2 + 18m = -6m(2m-3)$.

Giải $f'(m)=0$ ta được $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Vì $0<m<\dfrac{9}{4}$ nên chỉ nhận $m=\dfrac{3}{2}$.

Trên khoảng $0<m<\dfrac{9}{4}$, hàm số $f(m)$ đạt cực đại tại $m=\dfrac{3}{2}$, nên diện tích tam giác PAQ cũng lớn nhất khi $m=\dfrac{3}{2}$. Vậy giá trị cần tìm là $m=\dfrac{3}{2}$

Câu 42: Hình vẽ mô phỏng một con sông, trong hệ tọa độ Oxy (mỗi đơn vị dài $100m$ trong thực tế), hai bờ sông được mô phỏng bởi các đồ thị $y=\sqrt{6x}, x\geq 0$ và $y=\sqrt{4x-8}, x\geq 2$. Một nhà máy đặt tại điểm $(6;0)$. Người ta muốn thiết kế một con đường nối thẳng từ nhà máy qua bờ bên kia của sông tại điểm B, muốn vậy phải xây dựng một cây cầu BC .Hỏi có thể xây dựng được cây cầu dài tối thiểu bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải tham khảo

Nếu $y_B=y_C=0$ thì $BC=2$. Khi $y_B, y_C>0$, gọi $\Delta: x=ky+6$ là đường thẳng qua BC.

Ta có: $\begin{cases} B=\Delta\cap(C_1): x=\dfrac{y^2}{6} \Rightarrow y_B=3k+3\sqrt{k^2+4} \\ C=\Delta\cap(C_2): x=\dfrac{y^2}{4}+2 \Rightarrow y_C=2k+2\sqrt{k^2+4} \end{cases}$

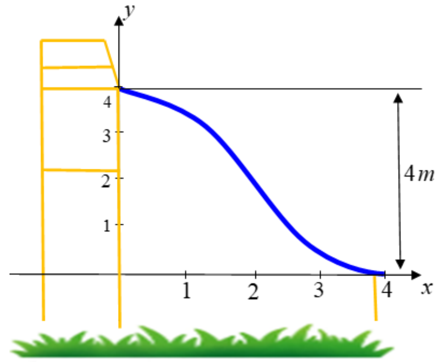
$$\Rightarrow BC^2=\left(y_B-y_C\right)^2\left(k^2+1\right)=\left(k+\sqrt{k^2+4}\right)^2\left(k^2+1\right)$$

Đặt $t=k+\sqrt{k^2+4}>0 \Rightarrow (t-k)^2=k^2+4 \Leftrightarrow k=\dfrac{4-t^2}{2t}$

$$\Rightarrow BC^2=t^2\left[\frac{\left(4-t^2\right)^2}{4t^2}+1\right]=\frac{t^4-4t^2+16}{4}\geq 3 \Rightarrow BC_{\min}=\sqrt{3}$$

Câu 43: Minh thực hiện một bản vẽ cầu trượt là đồ thị hàm bậc ba như hình bên. (Anh ấy lựa chọn hệ trục toạ độ sao cho đỉnh cao nhất của cầu trượt nằm trên trục Oy và điểm thấp nhất nằm trên trục Ox. Để đường cong của cầu trượt có chuyển tiếp nhẹ nhàng với phương ngang từ cao nhất và thấp nhất thì đạo hàm tại hoành độ các điểm này phải bằng 0.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Tại độ cao $3,375$m so với trục Ox, độ lớn độ dốc của cầu trượt bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải tham khảo

Dựa vào hình ảnh, ta thấy bài toán đang tìm hàm số bậc 3 có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Tại $x = 0, f(0) = 4 \Rightarrow d = 4$

2. Tại $x = 4, f(4) = 0 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(0) = 0 <=> f'(0) = 3a(0)^2 + 2b(0) + c = c$. Do đó $c = 0$

Đồ thị đi qua điểm có tọa độ $(4,0)$ => $f'(4) = 3a(4)^2 + 2b(4) + c = 0 \Rightarrow 6a + b = 0$

Thay $c = 0$ vào, ta có $48a + 8b = 0$ hay $6a + b = 0$.

Thay $d = 4$ và $c = 0$ vào $64a + 16b + 4c + d = 0$ ta có $16a + 4b + 1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a + b = 0 \\ 16a + 4b + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{8} \\ b = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

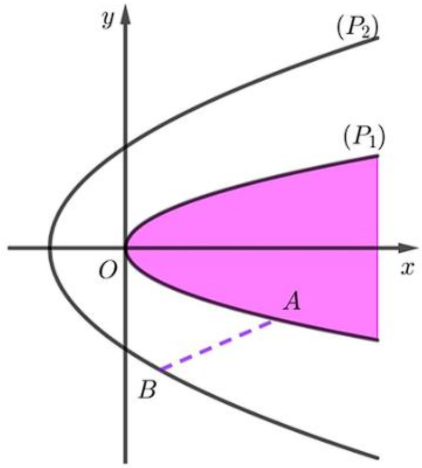
Hàm số là $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + 4$

Ta có $f(x) = 3.375 \Rightarrow \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{3}{4}x^2 + 4 = 3.375$. Giải phương trình này, ta có $x = 1$.

Đạo hàm của $f(x)$ là: $f'(x) = \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{2}x$.

Độ lớn độ dốc tại $x = 1$ là: $|f'(1)| = \left|\dfrac{3}{8}(1)^2 - \dfrac{3}{2}(1)\right| = \left|\dfrac{3}{8} - \dfrac{3}{2}\right| = \left|\dfrac{3}{8} - \dfrac{12}{8}\right| = \left|-\dfrac{9}{8}\right| = \dfrac{9}{8} = 1.125$.

Câu 44: Hình vẽ bên mô tả khúc cua của một con đường với lề phải là một phần parabol $(P_1): x = \dfrac{y^2}{4}$ và lề trái là một phần parabol $(P_2): x = \dfrac{y^2}{16} - 9$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Bề rộng mặt đường hẹp nhất (khoảng cách ngắn nhất giữa hai điểm lần lượt thuộc hai lề đường) quanh khúc cua đó là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải tham khảo

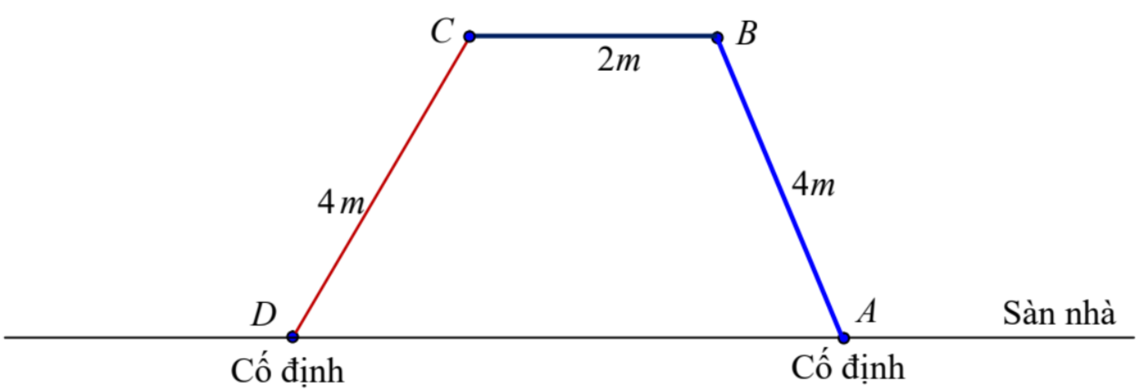
- Gọi A $\left(\dfrac{a^2}{4};a\right) \in (P_1)$ và B $\left(\dfrac{b^2}{16}-9;b\right) \in (P_2)$

Ta có: $AB^2 = (a-b)^2 + \left(\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^2}{16} + 9\right)^2$. Đặt $m = \dfrac{2a-b}{4}; n = \dfrac{2a+b}{4}$

$\Rightarrow AB^2 = (mn+9)^2 + (3m-n)^2 \geq (mn+9)^2 - 12mn = (mn+3)^2 + 72 \geq 72$

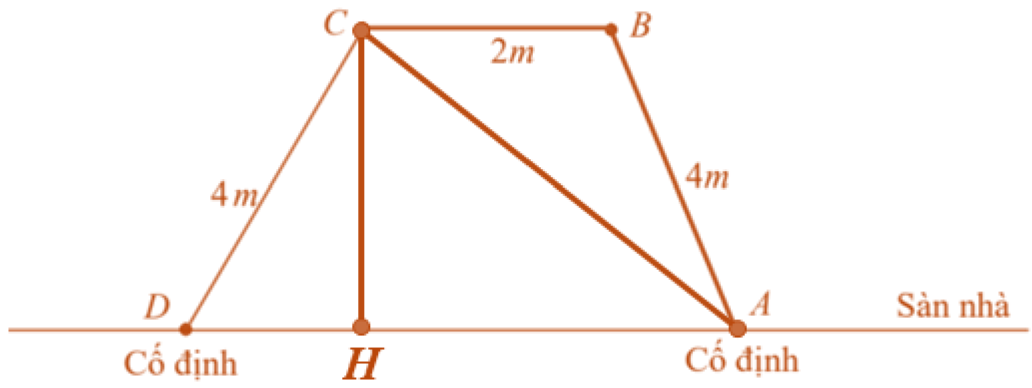
Từ đó $AB_{\min} = 6\sqrt{2} \approx 8,49$.

Câu 45: Cho ba thanh cứng AB, BC, CD gắn với nhau bằng hai bản lề tại B và C, hai đầu còn lại được gắn cố định với sàn nhà tại hai bản lề A và D. Biết rằng $AB = CD = 4m, BC = 2m$, $AD = 5m$ mặt phẳng $(ABCD)$ luôn vuông góc với sàn nhà. Khi hai bản lề B và C di chuyển thì điểm C cách sàn nhà một khoảng ngắn nhất bằng bao nhiêu centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?



Lời giải tham khảo

Đáp án: 152



Đặt $CH = h$

Ta có: $AC^2 = h^2 + AH^2 = h^2 + (AD - DH)^2 = 41 - 10\sqrt{16 - h^2}$

Dễ đánh giá khi $AC \uparrow$ tăng thì $h \uparrow$ cũng tăng do đó $AC_{\min} \Leftrightarrow h_{\min}$

Theo BĐT tam giác $AC \geq AB - BC = 2 \Rightarrow 2^2 = 41 - 10\sqrt{16 - h_{\min}^2} \Rightarrow h = \dfrac{\sqrt{231}}{10}$

Câu 46: Trên khu đất hình vuông cạnh $40m$, anh Tài mua $140m$ lưới B40 để rào kín một số chỗ để làm các mảnh vườn trồng hoa. Vì muốn mỹ quan đẹp nên anh chỉ rào thành các mảnh vườn dạng hình tròn, hình chữ nhật hoặc hình tam giác đều. Hỏi diện tích tối đa mà anh Tài rào được là bao nhiêu m^2 .(làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải tham khảo

Gọi P là chu vi của một mảnh vườn và S là diện tích của nó. Với tổng chiều dài lưới B40 là 140m, chúng ta có tổng chu vi của các mảnh vườn là $\sum P = 140m$.

- Với hình tròn có chu vi và diện tích là:

$$P = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{P}{2\pi};\ S_{\bigcirc} = \pi R^2 = \pi\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 = \pi\frac{P^2}{4\pi^2} = \frac{P^2}{4\pi}$$

Với hình chữ nhật: Để có diện tích lớn nhất với một chu vi cho trước, hình chữ nhật phải là hình vuông. Gọi cạnh hình vuông là a .

$$P = 4a \Rightarrow a = \frac{P}{4}\text{; Diện tích: } S_{\square} = a^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$$

Với hình tam giác đều: Gọi cạnh tam giác đều là b .

$$P = 3b \Rightarrow b = \frac{P}{3};\ S_{\Delta} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{P^2\sqrt{3}}{36}\ \text{ Do đó: } \Rightarrow S_{\bigcirc} > S_{\square} > S_{\Delta}$$

Như vậy, với cùng một chu vi, hình tròn luôn cho diện tích lớn nhất.

Tổng n đường tròn với bán kính $r_1, r_2, \ldots, r_n\ (r_1 = \max\{r_1, \ldots, r_n\})$

$\sum$ diện tích $=\pi\left(r_1^2+\ldots+r_n^2\right)\le\pi\left(r_1^2+\left(r_2+\ldots+r_n\right)^2\right)=\pi\left[r_1^2+\left(\frac{70}{\pi}-r_1\right)^2\right]=f(r_1);\ r_1\le 20$ TH1:

$\frac{70}{\pi}-20\le r_1\le 20\Rightarrow f(r_1)\le f(20)=1273\ (\text{m}^2)$

TH2: $r_1\le\frac{70}{\pi}-20\Rightarrow\pi\left(r_1^2+\ldots+r_n^2\right)\le\pi\left(r_1^2+r_1.r_2+\ldots+r_1.r_n\right)=\pi r_1\left(\frac{70}{\pi}-r_1\right)\le\pi\left(\frac{70}{\pi}-20\right)20<1273$. Vậy $\max=1273\text{ m}^2$

Câu 47: **Pi network(PI)** là đồng tiền số đang rất hot hiện nay. Giá tiền của mỗi Pi cập nhật liên tục sau mỗi $0,5$ giây, xác định bởi công thức $T=\max\{\alpha(x,y);\beta(x,y)\}$ (dolar). Trong đó:

+) $x=$ Số lượng **PI** mua vào – số lượng **PI** bán ra(theo dự kiến) ($x\in R$)

+) $y=$ Số lượng **PI** mua vào – số lượng **PI** bán ra(thực tế) ($y\in R$)

+) $\alpha(x,y)$ là hàm biểu diễn giá mỗi **PI** trong khoảng 1 giây trước đó.

+) $\beta(x,y)$ là hàm biểu diễn giá mỗi **PI** trong khoảng $0,5$ giây trước đó.

Giả sử trong một khoảng thời gian nào đó $\alpha(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2-2y^2+1$ và $\beta(x,y)=(x+1)^2+y^2$ Thì giá mỗi **PI** trong khoảng thời gian này nhỏ nhất bằng mấy dolar(làm tròn đến hàng phần trăm).

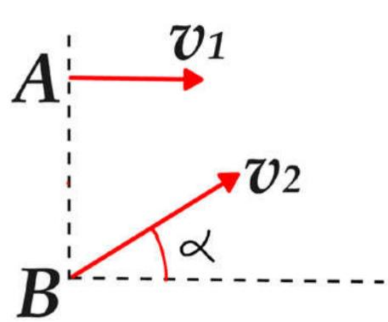
Lời giải tham khảo

Đáp án: 0,47

Ta có: $T\ge\dfrac{\left(x^2+y^2+\frac{k-2}{2}\right)^2+(x+k)^2-k^2+k+1-\frac{(k-2)^2}{2}}{k+1}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+y^2=\frac{2-k}{2}\\ x=-k\\ \alpha(x,y)=\beta(x,y)\end{cases}\Rightarrow T_{min}=\frac{9-\sqrt{65}}{2}\approx 0,47$

Câu 48: Có hai chất điểm A và B chuyển động cùng lúc, A đang ở hướng Bắc, đi về hướng Đông với vận tốc không đổi $v_1=15$ km/h ;B ở phía Nam, cách A 6 km, đồng thời chuyển động đều với vận tốc $v_2=26$ km/h theo hướng tạo với phương nằm ngang một góc α $\left(0^\circ<\alpha<90^\circ\right)$ (quan sát hình vẽ). Biết khoảng cách nhỏ nhất giữa hai chất điểm là 3 km, khi đó giá trị của α bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của độ).



Lời giải tham khảo

Tọa độ A chuyển động: $A_1(15t;0)$

Tọa độ B chuyển động: $B_1(26t.\cos\alpha;26t.\sin\alpha)$

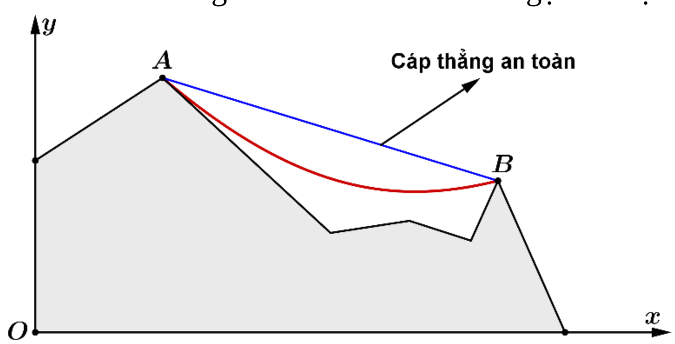
$D(t)$ là phương trình khoảng cách $AB \Rightarrow D(t)^2 = (26t.\cos\alpha - 15t)^2 + (26t.\sin\alpha - 6)^2$ (1)

$\frac{d}{dt}D(t)^2 = 0 = 2.(26.\cos\alpha - 15).(26t.\cos\alpha - 15t) + 2.26\sin\alpha.(26t.\sin\alpha - 6)$

$\Leftrightarrow 1352t.\cos\alpha^2 - 780t.\cos\alpha - 780t.\cos\alpha + 450t + 1352t.\sin\alpha^2 - 312\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1802t - 1560t.\cos\alpha - 312\sin\alpha \Leftrightarrow t = \dfrac{156\sin\alpha}{901 - 780\cos\alpha}$ thế vào $(1) \Rightarrow \alpha \approx 30^\circ$

Câu 49: Hình vẽ dưới đây mô tả mặt cắt ngang của một khu du lịch sinh thái kết nối hai đỉnh núi rại A và B bằng một cầu treo có hình dạng là một đường cong parabol. Trong hệ trục Oxy, trục Ox biểu thị khoảng cách theo phương ngang trục, Oy biểu thị độ cao so với mực nước biển. Khoảng cách theo phương ngang giữa hai ngọn núi A và B bằng 2000 m và chiều cao ngọn núi tại B là 800 m so với mực nước biển



Biết rằng, đỉnh núi tại A có độ cao là 1000 m so với mực nước biển, cách Oy 1000 m và độ dốc lớn nhất của cầu treo tại đó có độ lớn bằng $0,3$. Để đảm bảo an toàn, người ta lắp đặt thêm một sợi cáp an toàn căng thẳng nối trực tiếp hai đỉnh A và B. Xác định khoảng cách lớn nhất giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng theo đơn vị mét?

Lời giải

Trả lời: 100

Để bài làm nhìn gọn hơn, ta chuẩn hóa đơn vị về kilomet. Gọi parabol $f(x) = ax^2 + bx + c$

Parabol đi qua điểm $A(1;1)$ và điểm $B(3;0,8)$

Độ dốc tại A có độ lớn bằng $0,3$ nhưng nó đang đi xuống từ trái sang phải nên độ dốc là $-0,3$

Khi đó ta có: $y'(1) = -0,3 \Leftrightarrow 2a.1 + b = -0,3 \Leftrightarrow 2a + b = -0,3$

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b+c=1 \\ 9a+3b+c=0,8 \\ 2a+b=-0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{10} \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{10}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{5}$

Sợi cáp an toàn là đường thẳng $g(x)=mx+n$ đi qua $A(1;1)$ và $B(3;0,8)$ có phương trình là:

$g(x)=-\frac{1}{10}x+\frac{11}{10}$

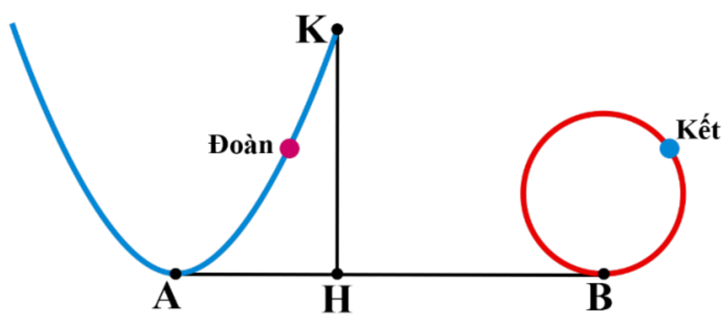
Khoảng cách giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng là : $D(x)=g(x)-f(x)$

$\Leftrightarrow D(x)=\left(-\frac{1}{10}x+\frac{11}{10}\right)-\left(\frac{1}{10}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{5}\right)\Leftrightarrow D(x)=-\frac{1}{10}x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{10}$

Khảo sát hàm số $D(x)$ để tìm khoảng cách lớn nhất. Nhận thấy, đây là đồ thị của hàm số bậc hai có hệ số $a<0$ nên sẽ đạt giá trị lớn nhất tại $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{2}{5}}{2.\left(-\frac{1}{10}\right)}=2\Rightarrow D_{max}(2)=0,1(\text{km})$

Vậy khoảng cách lớn nhất giữa cáp an toàn và cầu treo theo phương thẳng đứng là 100 mét.

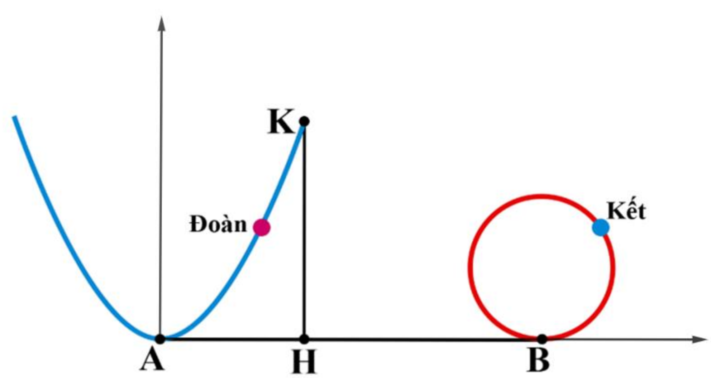
Câu 50: Khi dạo chơi trên một công viên bạn Đoàn di chuyển trên cung đường có dạng hình Parabol, bạn Kết di chuyển trên cung đường có dạng đường tròn (xem hình minh họa). Khoảng cách giữa đỉnh A của Parabol và tiếp điểm B của đường tròn là $16m$, $HK\perp AB$ và $AH=6\ m$, $HK=9\ m$.



Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết bằng bao nhiêu mét, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3 m? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải tham khảo

Đặt trục như hình:

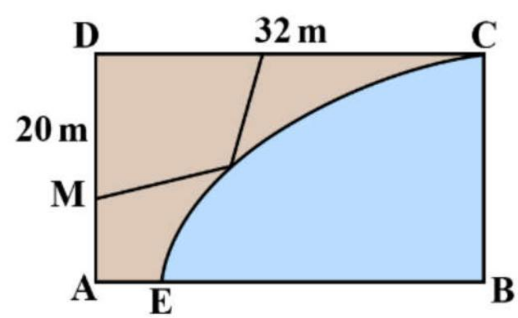


Dễ có phương trình của Parabol (P) là: $y=\frac{1}{4}x^2$.

Đường tròn tâm $I(16,3)$

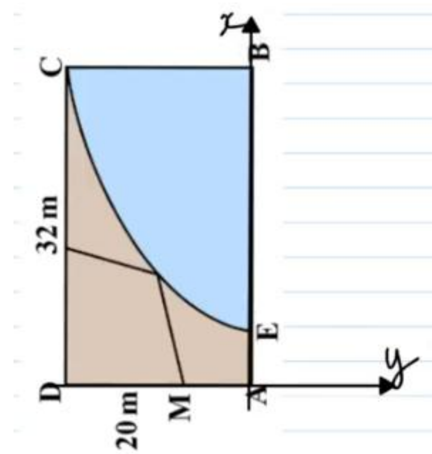
Vậy, ta cần tìm khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm $M(x,\frac{1}{4}x^2)$ trên Parabol đến tâm $I(16,3)$. Gọi khoảng cách từ M đến I là $d(M,I)$. Bình phương khoảng cách này là: $d^2=(x-16)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-3\right)^2$. Khảo sát hàm ta được $MN_{\min}=IM_{\min}-3=\sqrt{d_{\min}}-3\approx 8,43$

Câu 51: Bác Đức có một khu vườn hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước $20m\times 32m$. Trong vườn có đào một cái ao để nuôi cá, ao được bao bởi cạnh BC, BE và đường cong EC là một phần của parabol đỉnh E (như hình vẽ). Biết đường cong EC chia hình chữ nhật $ABCD$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.Bác Đức muốn làm một con đường đi từ điểm M trên cạnh AD ra một điểm trên mép bờ ao, rồi lại từ điểm đó tới một điểm trên cạnh DC. Hỏi tổng chiều dài con đường ngắn nhất là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải tham khảo

Câu này cần một chút kiến thức về tích phân



S nửa cổng parabol $=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.20h=\frac{40}{3}h=\frac{1}{2}.S_{ABCD}=320\Rightarrow h=24.$

$E(0,8)\Rightarrow(P):y=ax^2+8$ qua $C(-20,32)\Rightarrow 32=a.20^2+8\to a=\frac{3}{50}$

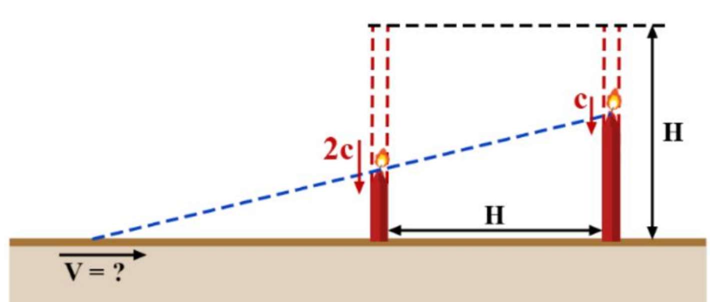
$$\Rightarrow(P):y=\frac{3}{50}x^2+8$$

$N\left(x\ ;\ \frac{3}{50}x^2+8\right),\ (-20\le x\le 0)$

$d(N,Ox)=y_N=\frac{3}{50}x^2+8;\ d(N,DC)=20-d(N,Oy)=20+x$.

Tổng quãng đường $\ge d(N,Ox)+d(N,OC)=\frac{3}{50}x^2+20+x\ge\frac{143}{6}$, dấu bằng: $x=-\frac{25}{3}$.

Câu 52: Hai ngọn nến 1 và 2 như hình vẽ (thứ tự từ trái qua phải) có chiều cao ban đầu H được đặt thẳng đứng cách nhau đoạn bằng H trên mặt bàn nằm ngang, thắp sáng lên cùng lúc. Vận tốc các đầu nến 2 và 1 lần lượt là c và $2c$, không đổi. Khi 2 nến cháy, người ta quan sát bóng của đầu cây nến thứ nhất trên mặt bàn do ánh sáng từ cây nến thứ 2 chiếu tới (điểm B minh họa ở hình vẽ). Biết vào thời điểm chiều cao của



cây nến thứ 2 dài gấp đôi chiều cao của cây nến thứ nhất, vận tốc của bóng B là ac. Giá trị của a bằng bao nhiêu?

Lời giải tham khảo

- Ta có sau thời gian t ($t > 0$) thì: $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{H-2ct}{H-ct}$

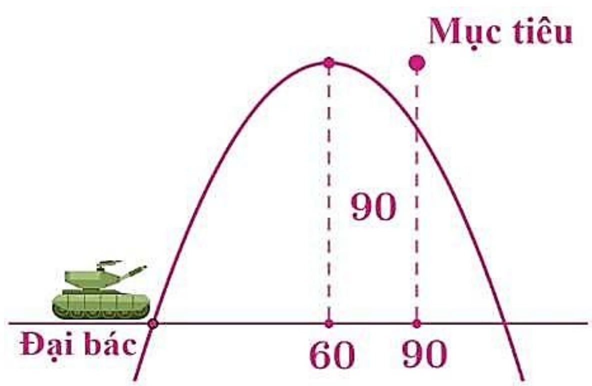
$$\to \frac{BO}{H-2ct} = \frac{BA}{H-ct} = \frac{H}{ct}$$

- Vậy: $OB = \dfrac{H}{ct}.(H-2ct) = \dfrac{H^2}{ct} - 2H = s(t) \mapsto v(t) = s'(t) = -\dfrac{H^2}{ct^2}$

- Xét thời điểm người ta quan sát bóng của đầu cây nến thứ nhất trên mặt bàn do ánh sáng từ cây nến thứ 2 dài gấp đôi chiều cao của cây nến thứ nhất: $\to H - ct = 2(H-2ct) \to H = 3ct$

- Vậy tốc độ di chuyển tại thời điểm đó là: $v(3ct) = s'(3ct) = \left|-\dfrac{9c^2t^2}{ct}\right| = 9c \to a = 9$

Câu 53: Một khẩu đại bác có nhiệm vụ là bắn trúng mục tiêu. Biết mục tiêu nằm ở vị trí cách đại bác 90 m theo phương ngang và cao 90 m. Do sai sót trong quá trình tính toán nên khẩu đại bác không bắn trúng mục tiêu. Biết quỹ đạo của viên đạn là một hình parabol đạt độ cao lớn nhất là 90 m tại vị trí cách đại bác 60 m theo phương ngang như hình vẽ. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa mục tiêu và viên đạn (đơn vị m, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải tham khảo

Đặt hệ tọa độ Oxy với gốc tọa độ là vị trí của khẩu đại bác. Khẩu đại bác: $O(0,0)$

Mục tiêu: Nằm ở vị trí cách 90 m theo phương ngang và cao 90 m, nên có tọa độ là $M(90,90)$.

Quỹ đạo viên đạn: Là một Parabol có đỉnh tại $I(60,90)$.

Ta có phương trình Prabol: $y = a(x-60)^2 + 90$.

Parabol này đi qua gốc tọa độ $O(0,0)$ (vị trí bắn), nên tọa độ của O phải thỏa mãn phương trình: $0 = a(0-60)^2 + 90 \Rightarrow a = \dfrac{-90}{3600} = -\dfrac{1}{40}$

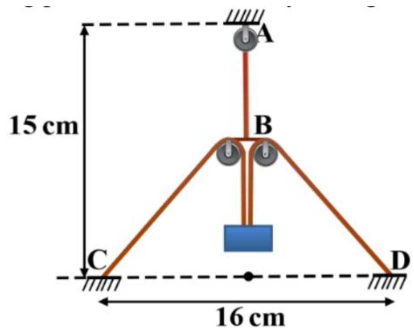
Vậy, phương trình quỹ đạo của viên đạn là: $y = -\dfrac{1}{40}(x-60)^2 + 90$.

Gọi $P(x,y)$ là một điểm bất kỳ trên quỹ đạo của viên đạn. Khoảng cách giữa viên đạn và mục tiêu $M(90,90)$ được tính bằng công thức: $d=\sqrt{(x-90)^2+(y-90)^2}$

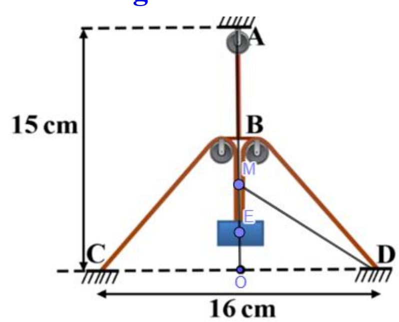
$$=> f(x)=d^2=(x-90)^2+\left(-\frac{1}{40}(x-60)^2\right)^2 <=> f(x)=(x-90)^2+\frac{1}{1600}(x-60)^4$$

Khảo sát hàm số ta được $d_{\min}=10\sqrt{2}$

Câu 54: Trong một công trình xây dựng, người ta sử dụng một hệ thống ròng rọc để nâng vật lên cao. Hệ thống ròng rọc bao gồm điểm A cố định cao 15 m so với mặt đất, tại điểm B là hai chiếc ròng rọc động với hai sợi dây mắc vào vật.C, D là hai điểm cố định. Mỗi sợi dây dài 16 m. Biết rằng hai chiếc ròng rọc được kéo lên theo phương thẳng đứng với vận tốc tại B là $0,5$ m/s. Tính tốc độ thay đổi chiều cao của vật so với mặt đất khi điểm B cách mặt đất 8 m (đơn vị m/s, làm tròn đến hàng phần trăm, các sợi dây không đàn hồi).



Lời giải tham khảo



$$MO+MP=16, MD^2-MO^2=8^2 \to (MD-MO)(MD+MO)=8^2 \to MD-MO=\frac{8^2}{16}=4 \to \begin{cases} MD=10 \\ MO=6. \end{cases}$$

Sau t giây: $MB=0,5t$

Ta có: $h=OB-BE$ và $OB=OM+MB=6+0,5t$.

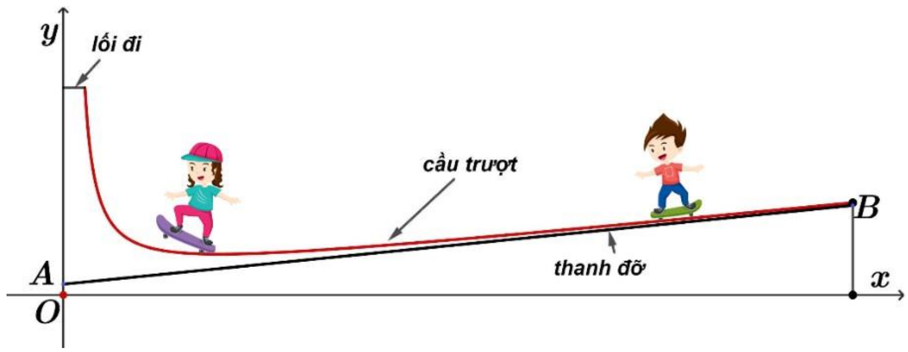
Đến đây để tính h theo t ta cần tính BE theo t

Có $BE+BD=16$ mà $BD=\sqrt{OB^2+OD^2}=\sqrt{(6+0,5t)^2+8^2} \Rightarrow BE=16-\sqrt{(6+0,5t)^2+8^2}$

$$\Rightarrow h=6+0,5t-\left(16-\sqrt{(6+0,5t)^2+8^2}\right)=0,5t-10+\sqrt{(6+0,5t)^2+64},$$

Khi $OB=8$ thì $6+0,5t=8 \Leftrightarrow t=4$. Vậy: $v_E(4)=\frac{d}{dt}\left(h(t)\right)|_{t=4} \approx 0,85.$

Câu 55: Tại một công viên, người ta thiết kế một cầu trượt, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox ở mặt đất, mỗi đơn vị dài $1\ m$ thì cầu trượt là một phần của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}(a\neq 0)$ với chiều dài theo phương nằm ngang là $71\ m$. Ở điểm đầu của cầu trượt có một lối đi song song với Ox, xuất phát từ 1 điểm thuộc Oy, dài $2\ m$ và cao $19,2\ m$. Để gia cố chắc chắn cho cầu trượt, người ta dùng một thanh đỡ AB với $A(0;1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của cầu trượt, khoảng cách giữa cầu trượt và thanh đỡ là $0,25\ m$.Hỏi điểm thấp nhất của cầu trượt cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải tham khảo

AB có hệ số góc $k \Rightarrow AB: y=kx+1$

Cầu trượt có phương trình: $y=kx+1+\dfrac{\alpha}{x-1}$

Qua C(2;19,2) $\rightarrow$ $k.2+1+\dfrac{\alpha}{2-1}=19,2$

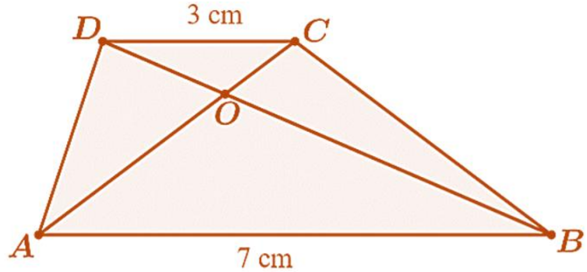
Tại điểm cuối của cầu trượt, khoảng cách giữa cầu trượt và thanh đỡ là $0,25\ m$ nên ta có:

$$\left(k.73+1+\frac{\alpha}{73-1}\right)-(k.73+1)=0,25\Rightarrow\begin{cases}\alpha=18\\ k=\dfrac{1}{10}.\end{cases}$$

Cầu trượt có pt: $y=\dfrac{1}{10}x+1+\dfrac{18}{x-1}$, $y'=\dfrac{1}{10}-\dfrac{18}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)^2-180}{10(x-1)^2}=\dfrac{\left(x-1-\sqrt{180}\right)\left(x-1+\sqrt{180}\right)}{10(x-1)^2}$

$$\Rightarrow y_{CT}=y(1+\sqrt{180})=\frac{11+12\sqrt{5}}{10}\approx 3,78$$

Câu 56: Một tấm bìa có dạng hình thang với đáy lớn là 7 cm, đáy bé bằng 3 cm, hai đường chéo hình thang vuông góc nhau. Đặt $x=OA.OC$; $y=OB.OD$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^2y}{x+y}$(đơn vị cm vuông, làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải tham khảo

Trả lời: 65,3

Ta có tính chất: $ABCD$ là hình thang, $AB // CD$, $AC \perp BD$.

O là giao điểm của AC và BD $\to \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD}$.

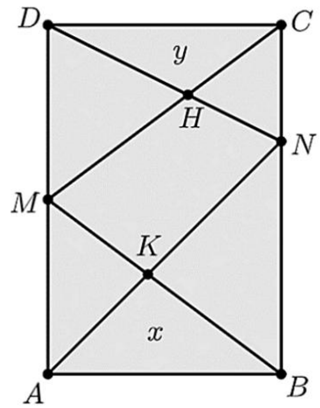
Áp dụng : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{7}{3} \to \begin{cases} OC = \dfrac{3}{7}OA \\ OD = \dfrac{3}{7}OB \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7}OA^2 \\ y = \dfrac{3}{7}OB^2 \end{cases} \to T = \frac{x^2 y}{x+y} = \frac{\left[\dfrac{3}{7}OA^2\right]^2 . \dfrac{3}{7}OB^2}{\dfrac{3}{7}(OA^2 + OB^2)}$$

Mà ta lại có $OA^2 + OB^2 = AB^2 = 49 \to T = \dfrac{\left(\dfrac{3}{7}\right)^2 OA^4 . \dfrac{3}{7}(49 - OA^2)}{\dfrac{3}{7}.49} = \dfrac{9}{2401}OA^4(49 - OA^2)$

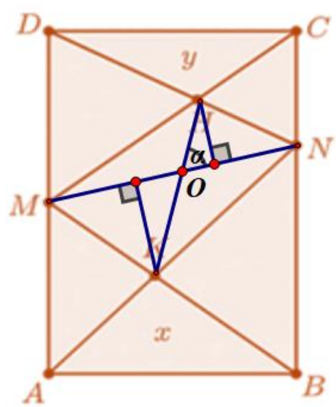
Xét $f(x) = \dfrac{9}{2401}x^4(49 - x^2)$ max $x = \dfrac{7\sqrt{6}}{3} \Rightarrow T_{\max} = f\left(\dfrac{7\sqrt{6}}{3}\right) = \dfrac{196}{3} \approx 65,3$

Câu 57: Để kỷ niệm ngày cưới của mình, có hai con thiên nga quyết định bơi biểu diễn trên một hồ nước hình chữ nhật nếu nhìn từ trên xuống, chúng bơi từ hai góc của hồ bơi và tạo ra hai đường dích dắc AND và BMC, diện tích các tam giác ABK và CDH lần lượt là x và y. Biết rằng $MN = 7m$, $HK = 5m$. Giá trị lớn nhất biểu thức $P = x^2 y$ bằng bao nhiêu m^3 (làm tròn đến hàng đơn vị) ?



Lời giải tham khảo

Trả lời: 794



+) $\dfrac{S_{DHC}}{S_{MHN}} = \dfrac{DH.HC}{MH.HN} = \dfrac{DH}{HN}.\dfrac{HC}{MH} = \dfrac{DM}{CN}.\dfrac{CN}{DM} = 1 \rightarrow S_{DHC} = S_{MHN} = x$

+) $\dfrac{S_{AKB}}{S_{MKN}} = \dfrac{AK.KB}{MK.KN} = \dfrac{AK}{KN}.\dfrac{KB}{MK} = \dfrac{AM}{BN}.\dfrac{BN}{AM} = 1 \rightarrow S_{AKB} = S_{MKN} = y.$

Khi đó: $x + y = S_{MHN} + S_{MKN} = \dfrac{1}{2}MN.HO.\sin\alpha + \dfrac{1}{2}MN.KO.\sin\alpha$

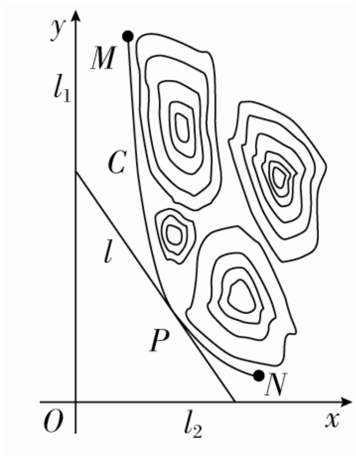
$$= \frac{1}{2}MN(HO + KO).\sin\alpha = \frac{1}{2}MN.Hk.\sin\alpha = \frac{35}{2}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow T = x^2y = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.y \le 4.\frac{\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y\right)^3}{27} \le 4.\frac{\left(\frac{35}{2}\sin\alpha\right)^3}{27} \le \frac{4}{27}\left(\frac{35}{2}\right)^3 \approx 794.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2} = y \\ \sin\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \alpha = 90^\circ \end{cases}.$

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 58: Ở khu vực ngoài một khu danh thắng cảnh có hai con đường dạng đường thẳng l_1, l_2 vuông góc nhau. Để tiếp tục cải thiện tình hình giao thông của khu danh thắng cảnh, người ta dự định xây dựng một con đường thẳng l nối hai con đường l_1, l_2 và đường biên của khu danh thắng cảnh. Gọi hai con đường vuông góc là l_1, l_2, đường biên khu danh thắng cảnh là đường cong C, con đường dự định xây là l như hình vẽ. M, N là hai điểm trên C. Đo được khoảng cách từ M đến l_1, l_2 lần lượt là 5km và 40km ; từ N đến l_1, l_2 lần lượt là 20km và $2,5$km. Lấy hai đường thẳng chứa l_2 và l_1 lần lượt làm trục Ox và Oy, lập hệ trục tọa độ vuông góc xOy. Giả sử đường cong C thỏa mãn mô hình $y = \frac{a}{x^2 + b}$ (a, b là hằng số)



Giả sử đường l tiếp xúc với đường cong C tại P, hỏi độ dài ngắn nhất của con đường thẳng l bằng bao nhiêu km. (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)

Lời giải tham khảo

Trả lời: 26

Theo đề bài, tọa độ của M, N lần lượt là $(5;40), (20;2,5)$. Thay vào $y = \frac{a}{x^2 + b}$ được $\begin{cases} \frac{a}{25+b} = 40 \\ \frac{a}{400+b} = 2,5 \end{cases}$

Giải ra $a = 1000, \quad b = 0$, suy ra $C: y = \frac{1000}{x^2} (5 \le x \le 20)$. Do đó $P\left(t; \frac{1000}{t^2}\right)$

Gọi tiếp tuyến của C tại P cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B. Ta có $y' = -\frac{2000}{x^3}$

Phương trình tiếp tuyến tại P: $y - \frac{1000}{t^2} = -\frac{2000}{t^3}(x - t)$. Suy ra $A\left(\frac{3t}{2}; 0\right), \quad B\left(0; \frac{3000}{t^2}\right)$.

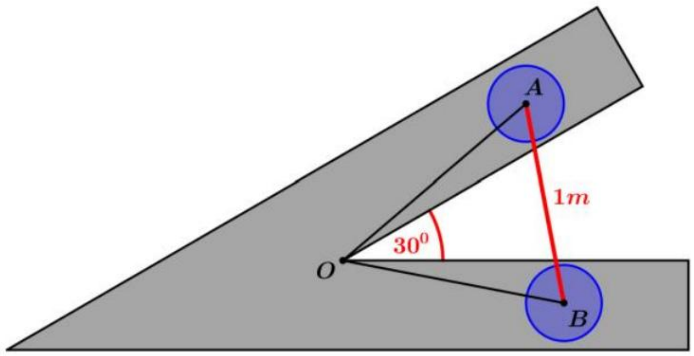
Vậy độ dài đường l là $f(t) = AB = \sqrt{\left(\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(\frac{3000}{t^2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4}}, \quad t \in [5;20]$.

Đặt $g(t) = t^2 + \frac{4 \times 10^6}{t^4} \Rightarrow g'(t) = 2t - \frac{16 \times 10^6}{t^5}$. Giải $g'(t) = 0$ được $t = 10\sqrt{2}$.

Khi $t \in (5;10\sqrt{2})$ thì $g'(t) < 0$, nên $g(t)$ giảm; khi $t \in (10\sqrt{2};20)$ thì $g'(t) > 0$, nên $g(t)$ tăng. Do đó $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 10\sqrt{2}$, và $g_{\min} = 300, \quad f_{\min} = \frac{3}{2}\sqrt{300} = 15\sqrt{3}.$

Vậy khi $t = 10\sqrt{2}$ thì độ dài đường l ngắn nhất, và độ dài ngắn nhất là $15\sqrt{3} \approx 26km$.

Câu 59: Trong một cuộc thi kiến trúc dành cho sinh viên, các thí sinh được giao nhiệm vụ thiết kế một cây cầu dã chiến bắc qua một dòng sông.



Để thử nghiệm sự vững chắc và khả năng chịu tải của cầu, ban tổ chức đã thiết kế hai đường ray tạo với nhau một góc 30° trên mặt đất (Tham khảo hình vẽ trên). Trên mỗi đường ray, hai vật nặng có cùng trọng lượng được đặt tại A, B. Hai vật này được nối với nhau bằng một thanh cứng AB dài 1m (sao cho mỗi vật đều có thể di chuyển dọc được trên hai đường ray). Nối hai vật bằng một sợi dây vòng qua một cái ròng rọc tại O .Để kiểm tra tính ổn định của cầu, một người tham gia sẽ đứng tại vị trí B và kéo một trong hai vật nặng di chuyển lên đường ray Oy. Mục tiêu là kéo vật nặng ra xa nhất so với điểm gốc O mà không làm cầu bị sập. Vị trí xa nhất mà người tham gia có thể kéo vật nặng trên đường ray Oy ra khỏi điểm O là bao nhiêu? (làmtròn đến hàng phần trăm). Biết rằng vật A và B giống nhau đều là hình tròn bán kính 0 ,15m.

Lời giải tham khảo

Với $\begin{cases} R_A = R_B = AC = BD = 0{,}15m \\ AB = 1m \end{cases}$ và $COD = 30^\circ$, suy ra ta cần tìm giá trị $\max\{OA;OB\}$

Trước hết ta có: $\sin COA = \frac{0{,}15}{OA}; \sin BOD = \frac{0{,}15}{OB} \to AOB = 30^\circ + COA + BOD$

Tiếp đến theo định lí Cosin ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos AOB$

$= OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\left(30^\circ + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA} + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right)$ (1). Ta xét:

$$\cos\left(30^\circ + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA} + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA} + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA} + \sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\cos\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right) - \frac{0{,}15}{OA}.\frac{0{,}15}{OB}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{0{,}15}{OA}\cos\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OB}\right) + \frac{0{,}15}{OB}\cos\left(\sin^{-1}\frac{0{,}15}{OA}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt{1-\left(\frac{0{,}15}{OA}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{0{,}15}{OB}\right)^2} - \frac{0{,}15^2}{OA.OB}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{0{,}15}{OA}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}15}{OB}\right)^2} + \frac{0{,}15}{OB}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}15}{OA}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{OA^2-0,15^2}.\sqrt{OB^2-0,15^2}-0,15^2\right)-0,15\left(\sqrt{OA^2-0,15^2}+\sqrt{OB^2-0,15^2}\right)}{2.OA.OB}$$

Đặt $(a^2;b^2)=(OA^2-0,15^2;OB^2-0,15^2)$, khi ấy: $\cos AOB=\dfrac{\sqrt{3}(ab-0,15^2)-0,15(a+b)}{2.OA.OB}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta suy ra: $1=OA^2+OB^2-\sqrt{3}(ab-0,15^2)+0,15(a+b)$ (3)

Do $(a^2+0,15^2;b^2+0,15^2)=(OA^2;OB^2)$ nên thế vào (3) ta suy ra được phương trình sau:
$1=a^2+b^2+2.0,15^2-\sqrt{3}(ab-0,15^2)+0,15(a+b)$ (4)

Thực hiện biến đổi về phương trình bậc 2 theo ẩn b và xét Δ, ta có (4) tương đương với:
$b^2+(0,15-\sqrt{3}a)b+a^2+0,15a+0,15^2(2+\sqrt{3})-1=0$

Tiếp đến ta xét:
$\Delta=(0,15-\sqrt{3}a)^2-4\left[a^2+0,15a+0,15^2(2+\sqrt{3})-1\right]=-a^2-0,3(\sqrt{3}+2)a-(7+4\sqrt{3})0,15^2+4$

Phương trình (4) có nghiệm khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ a^2=OA^2-0,15^2>-0,15^2\end{cases}$ <=> $-0,15^2<a\le 1,4402....$

Suy ra $a_{\max}=1,4402....\to OA^2=2,0967\to \max\{OA;OB\}=OA_{\max}=\sqrt{2,0967}\approx 1,45(m)$

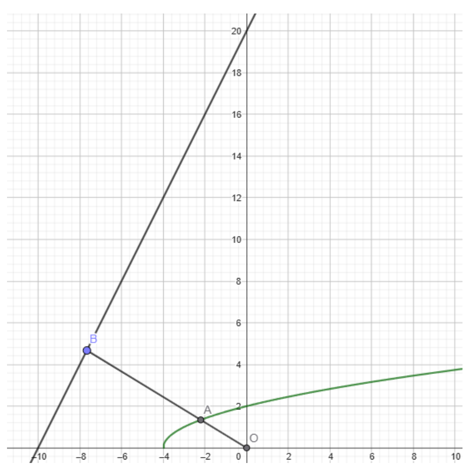
Vậy ta suy ra giá trị lớn nhất cần tìm là $\approx 1,45m$.

Câu 60: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A nằm trên đồ thị hàm số $y=\sqrt{x+4}$ và điểm B nằm trên đồ thị hàm số $y=2x+20$, biết rằng O,A,B theo thứ tự thẳng hàng. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?

Lời giải tham khảo

Trả lời: 5,67

Ta phác họa đồ thị dễ dàng thấy được điểm A phải thuộc khoảng $(-4;0)$



Gọi A $\left(a;\sqrt{a+4}\right);\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA},\ k>1\Rightarrow B=kA=\left(ka,k\sqrt{a+4}\right)$

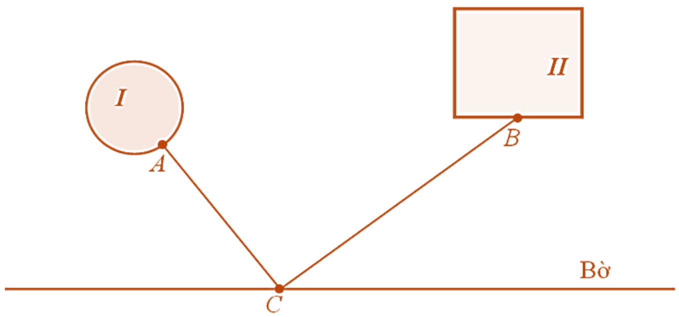
Mà $B\in y=2x+20\Leftrightarrow 2(ka)+20=k\sqrt{a+4}$ (1)

Lại có: $AB^2=(ka-a)^2+\left(k\sqrt{a+4}-\sqrt{a+4}\right)^2=(a^2+a+4)(k^2+1)$ (2)

$$(1) \Rightarrow k(\sqrt{a+4}-2a)=20 \Rightarrow k=\frac{20}{\sqrt{a+4}-2a} \Rightarrow AB^2=\left(a^2+a+4\right)\left(\frac{20}{\sqrt{a+4}-2a}-1\right)^2=h(a)$$

Khảo sát hàm ta được $AB_{\min} \approx 5,67$

Câu 61: Mô đất nhỏ I được coi như hình tròn cùng bán kính bằng 5 mét, có tâm cách bờ là 20 mét, mô đất II là một hình vuông có một cạnh bằng 12 mét song song với bờ có tâm cách bờ 30 mét. Người ta nối một đường dây từ điểm A thuộc mô đất I đến gặp bờ tại điểm C, rồi từ C nối với điểm B thuộc mô đất II. Biết hình chiếu vuông góc của hai tâm hai mô đất trên bờ cách nhau 30 mét. Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng quãng đường $AC+CB$ theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?



Lời giải tham khảo

Cách 1: Dễ thấy rằng $AC_{\min}$ khi I,A,C thẳng hàng, $BC_{\min}$ khi B thuộc rìa của hình vuông

Đến đây ta quay về bài toán dễ quen thuộc tìm điểm C sao cho AC+CB nhỏ nhất

Đáp án: 4512

Cách 2: Tương tự lập luận ở **Cách 1** khác cái là lấy đối xứng tâm của đường tròn I qua Bờ, bài toán quen thuộc nên không trình bày thêm

Câu 62: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $(1 \le x \le 400)$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x)=x^3-1999x^2+1001000x+250000$ (đồng).Trong đó chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x)=\dfrac{100000x}{\frac{3}{2}x+1}$ (đồng). Tổng chi phí mua nguyên vật liệu cho x sản phẩm là $H(x)=2x^3+100000x-50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp đó mua nguyên vật liệu với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải tham khảo

Đáp án: 253

Ta có chi phí

$H(200)=35950000$

$H(x-200)=2(x-200)^3+100000(x-200)-50000,\ \ 400 \ge x > 200$

Ta có lợi nhuận thu được tính như sau:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1999x^2+1001000x+250000-\dfrac{100000x^2}{\frac{3}{2}x+1}-\dfrac{99}{100}(2x^3+100000x-50000),\text{khi } 0\le x\le 200\\ x^3-1999x^2+1001000x+250000-\dfrac{100000x^2}{\frac{3}{2}x+1}-\dfrac{99}{100}H(200)-\dfrac{98}{100}H(x-200),\text{khi } 200< x\le 400\end{cases}$$

*Xét trường hợp khi $0\le x\le 200$

$$f(x)=-0,98x^3-1999x^2+902000x+299500-\frac{200000x^2}{3x+2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-26,46x^4-36017,28x^3+8070912,24x^2+10080008x+3608000}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x\approx 196,98$$

BBT:

x	0		$196,98$		200
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$79,834.10^6$	$\searrow$	

*Xét trường hợp khi $200<x\le 400$

$$f(x)=-0,96x^3-823x^2+667800x-11500-\frac{200000x^2}{3x+2},200<x\le 400$$

$$\Rightarrow f'(x)=-2,88x^2-1646x+667800-\frac{600000x^2+800000x}{(3x+2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x\approx 253,11$$

BBT:

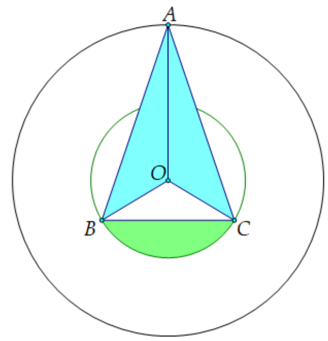
x	200		$253,11$		400
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$83,894.10^6$	$\searrow$	

Vì số sản phẩm sản xuất được là số tự nhiên, từ BBT trên ta so sánh $f(253)$ và $f(254)$

Ta có: $f(253)\approx 83893648,05$ và $f(254)\approx 83892445,32$

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất 253 sản phẩm thì lợi nhuận là lớn nhất

Câu 63: Như hình, một huy hiệu kỉ niệm có cấu trúc gồm hai đường tròn đồng tâm bán kính lần lượt 1 cm và 2 cm, tâm O. Tam giác cân ABC có đỉnh A nằm trên đường tròn ngoài, hai điểm B, C nằm trên đường tròn trong; O và A nằm cùng phía đối với đường thẳng BC. Gọi S_1 là diện tích hình quạt-dây (phần giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC), gọi S_2 là tổng diện tích của ΔOAB và ΔOAC. Khi $S_2 - S_1$ đạt giá trị lớn nhất thì huy hiệu đẹp nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất đó? (*làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, đơn vị* cm^2)

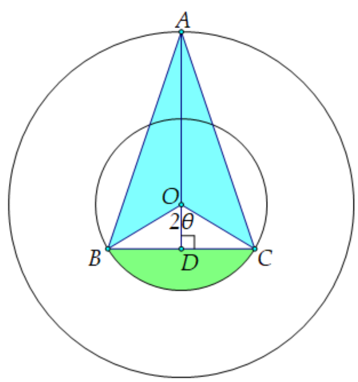


Lời giải tham khảo

Trả lời: 1,15

Đặt $BOC = 2\theta \in (0, \pi)$ nên $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Kẻ $OD \perp BC$ tại D. Khi đó D là trung điểm của BC. Vì ΔABC cân tại A nên A, O, D thẳng hàng. Lại có $BOA = AOC = \pi - \theta$.



Vì $OB = OC = 1$, nên $S_1 =$ diện tích quạt $BOC -$ diện tích $\Delta BOC = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin 2\theta = \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$.

Còn $S_2 = 2 \cdot S_{\Delta AOB} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(AOB) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin(\pi - \theta) = 2\sin\theta,$

Vì thế $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\theta \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OC \cdot \sin 2\theta = \theta - \sin\theta\cos\theta$, $S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin(\pi - \theta) = 2\sin\theta$

Suy ra $S_2 - S_1 = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Đặt $f(\theta) = 2\sin\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta,\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì $f'(\theta) = 2\cos\theta + \cos 2\theta - 1 = 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2.$

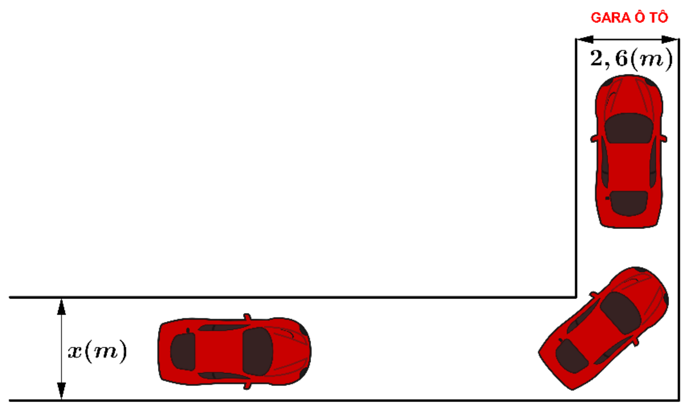
Giải $f'(\theta) = 0$: $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$ được $\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hoặc $\cos\theta = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Kí hiệu $\cos\theta_0 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\theta_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

θ	0		θ_0		$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	

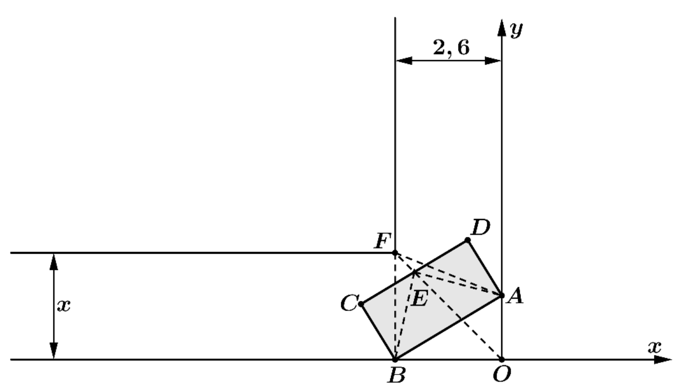
Vì vậy $\theta = \theta_0$, tức $\cos\theta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, thì $f(\theta)$ lớn nhất, hay $S_2 - S_1 \approx 1{,}15$ đạt lớn nhất.

Câu 64: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x\,(m)$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2{,}6\,(m)$. Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1{,}9m$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5\,(m)$, chiều rộng $1{,}9\,(m)$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? ***(Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)***



Lời giải tham khảo

Đáp án: 3,7



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Đặt $OA = b$ thì ta suy ra $OB = \sqrt{25 - b^2}$ với $b \in (0;5)$

Điều kiện để ô tô có thể đi vào GARA được thì $S_{OAFB} \geq S_{OAEB} \Leftrightarrow S_{OAFB} - S_{OAEB} \geq 0$

Ta có: $S_{OAFB} = S_{\Delta OAF} + S_{\Delta OBF} = \frac{1}{2}.d\left(F;OA\right).OA + \frac{1}{2}d\left(F;OB\right).OB = \frac{2,6.b + x\sqrt{25-b^2}}{2}$

Mặt khác: $S_{OAEB} = S_{\Delta OAB} + S_{\Delta AEB} = \frac{1}{2}.OA.OB + \frac{1}{2}d\left(E;AB\right).AB = \frac{1}{2}.b.\sqrt{25-b^2} + \frac{1,9.5}{2} = \frac{b\sqrt{25+b^2}+9,5}{2}$

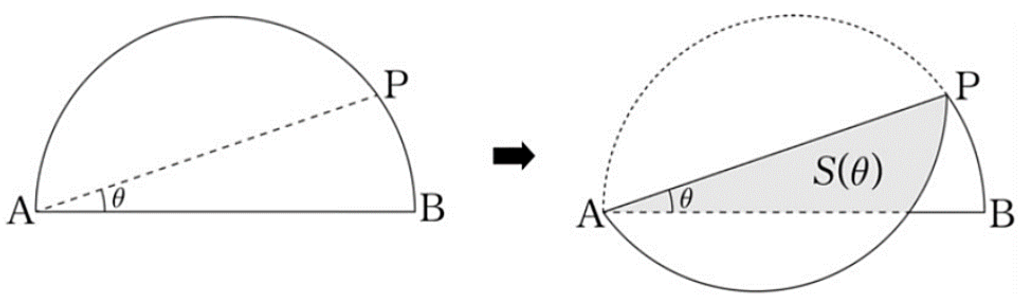
Sử dụng điều kiện: $\frac{2,6.b + x\sqrt{25-b^2}}{2} \geq \frac{b\sqrt{25+b^2}+9,5}{2} \Leftrightarrow x \geq f\left(b\right) = \frac{b\sqrt{25-b^2}+9,5-2,6b}{\sqrt{25-b^2}}$

Khảo sát để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(b\right) = \frac{b\sqrt{25-b^2}+9,5-2,6b}{\sqrt{25-b^2}}$ trên $\left(0;5\right)$

Sử dụng chức năng $\frac{d}{dX}\left(\frac{b\sqrt{25-b^2}+9,5-2,6b}{\sqrt{25-b^2}}\right)$ tìm được $b=4$

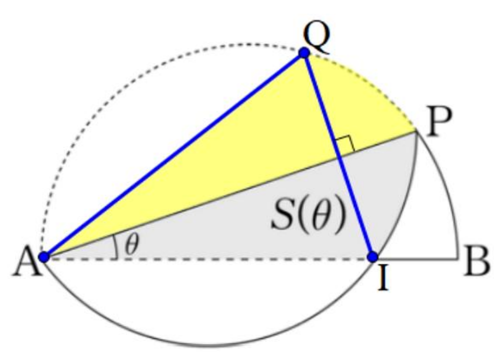
Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $\min\limits_{(0;5)} f\left(b\right) = f\left(4\right) = 3,7$ hay $x \geq 3,7$.

Câu 65: Cho mảnh giấy màu hình bán nguyệt có đường kính là đoạn thẳng AB có độ dài bằng 2. Trên cung AB lấy một điểm P. Gấp mảnh giấy theo nếp gấp là đoạn thẳng AP sao cho hai phần giấy khít lên nhau. Khi $PAB = \theta$ (với $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$), gọi $S(\theta)$ là diện tích phần giấy bị chồng lên nhau.



Giả sử $S(\theta)$ đạt giá trị lớn nhất tại $\theta = \alpha$. Hỏi giá trị của $\cos\alpha$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải tham khảo



Gọi điểm I là điểm đề lên nhau của cung AP với AB. Kẻ $IQ \perp AP (Q \in AP)$ xem hình sau:

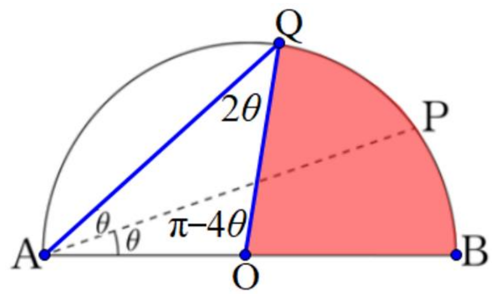
Từ đó ta dễ thấy được diện tích tô màu vàng bằng diện tích $S(\theta)$.

Gọi O là trung điểm AB, được $QAO = AQO = QOB = 2\theta$; $AOQ = \pi - 4\theta$

Ta có diện tích tam giác $AQO = \frac{1}{2}.1.1.\sin(\pi - 4\theta) = \frac{1}{2}\sin 4\theta$

Ta có diện tích hình quạt tròn QPB có tâm O (tô màu đỏ) là: $\frac{1}{2}.1^2.4\theta = 2\theta$

Diện tích của tam giác $AOP = \frac{1}{2}.1.1\sin(\pi - 2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{2}$



Diện tích hình quạt tròn PB tâm O là: $\frac{1}{2}.1^2.2\theta = \theta$

Vậy diện tích

$$S(\theta) = \left(2\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta\right) - \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) = \theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

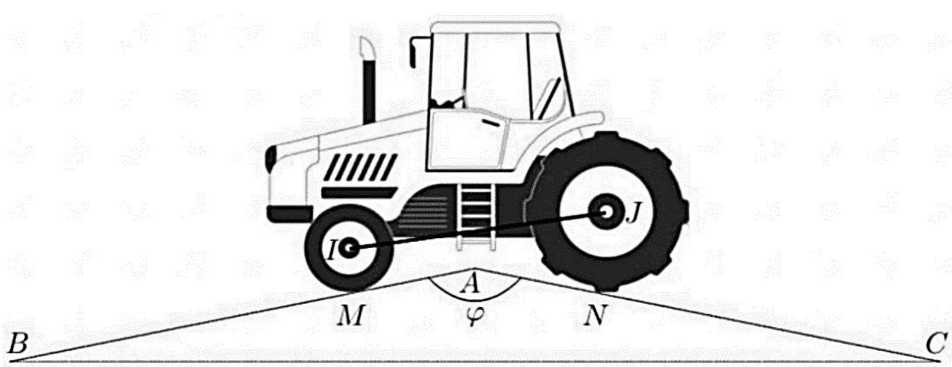
Có $S'(\theta) = 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 1 = 4\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1$

Xét $S'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$ (với $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) thì $S'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

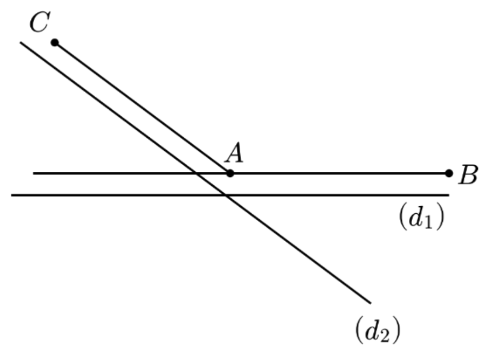
Lập bảng biến thiên cho hàm số $S(\theta)$.

Ta suy ra được $S(\theta)$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos 2\theta = \frac{1+\sqrt{17}}{8} \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \approx 0,91$

Câu 66: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC cân tại A; $AB = 1000$; $BAC = \varphi$ thỏa mãn $\tan\varphi = -\frac{3}{4}$. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC. Hai điểm I và J di động sao cho đường thẳng AB tiếp xúc với đường tròn tâm I bán kính bằng 100 tại điểm M thuộc đoạn AB, đường thẳng AC tiếp xúc với đường tròn tâm J bán kính bằng 180 tại điểm N thuộc đoạn AC, khoảng cách giữa hai điểm I và J bằng 700, hai điểm I và G nằm ở hai phía khác nhau của đường thẳng AB, hai điểm J và G nằm ở hai phía khác nhau của đường thẳng AC. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng IJ đạt giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải tham khảo



Đặt hệ trục toạ độ như hình vẽ với $A(0;0)$, $B(1000;0)$, $\tan\varphi = -\frac{3}{4} \Rightarrow (AC): y = -\frac{3}{4}x$

Ta lại có: $d(I;AB) = 100; d(J;AC) = 180 \Rightarrow I \in (d_1): y = -100; J \in (d_2): y = -\frac{3}{4}x - 225$

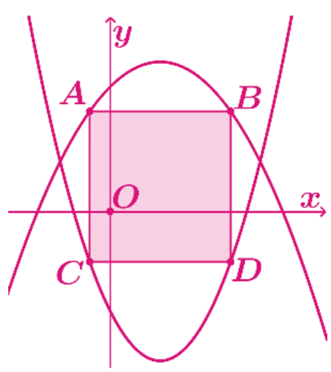
Khi này ta có:

$$I(a;-100); J\left(x; -\frac{3}{4}x - 225\right); IJ = 700 \Rightarrow (a-x)^2 + \left(\frac{3}{4}x + 125\right)^2 = 700^2 \Rightarrow a = x + \sqrt{700^2 - \left(\frac{3}{4}x + 125\right)^2}$$

Từ đây: $2S_{AIJ} = \left|-100x + \left(x + \sqrt{700^2 - (0,75x+125)^2}\right)(0,75x+225)\right| \Rightarrow \min d(A;IJ) = \frac{2\min S}{700} \approx 27$

Đáp án: 27

Câu 67: Người ta muốn làm sàn nổi nối liền trên một sân khấu nổi trên mặt hồ có tiết diện là phần hình chữ nhật $ABDC$, nằm ở phần trong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ và đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}$ (AB song song với trục hoành, mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ dài $10m$).Để làm sàn nổi, người ta phải bỏ ra 50 000 VNĐ/$1m^2$. Tính số tiền lớn nhất (đơn vị triệu đồng) mà người ta phải bỏ ra khi làm sàn nổi (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải tham khảo

Goi hoành độ của các điểm C và D lần lượt là $x_C = 1 - t$ và $x_D = 1 + t$ (với $t > 0$), do hình chữ nhật có hai cạnh bên song song với trục tung và đối xứng qua trục đối xứng chung của hai parabol là đường thẳng $x = 1$.

Chiều rộng của hình chữ nhật là: $AB = (1+t) - (1-t) = 2t$.

Tung độ của A và B là: $y_{AB} = -\frac{1}{2}(1+t)^2 + (1+t) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}t^2 + 3$.

Tung độ của C và D là: $y_{CD} = (1+t)^2 - 2(1+t) - 2 = t^2 - 3$.

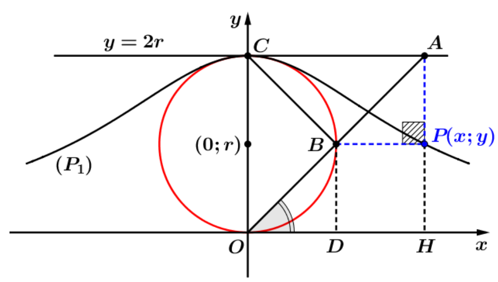
Chiều cao của hình chữ nhật là: $h = y_{AB} - y_{CD} = \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3\right) - (t^2 - 3) = 6 - \frac{3}{2}t^2$.

Để chiều cao có giá trị dương, ta cần $6 - \frac{3}{2}t^2 > 0 \Rightarrow t^2 < 4 \Rightarrow 0 < t < 2$.

$$\Rightarrow S_{ABDC} = 2t\left(6 - \frac{3}{2}t^2\right) = 12t - 3t^3 \Rightarrow S_{max} = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

Chi phí (triệu đồng) $= \frac{80}{\sqrt{3}} \approx 46.2$

Câu 68: Hình vẽ sau mô tả ***một con mắt Sauron*** vẽ bởi 2 đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy: vẽ một đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y = 2$ tại điểm A Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy, khi ấy tập hợp tất cả các điểm P tạo thành một đường cong (P_1) gọi là đường cong Agnesi. Vậy tiếp tuyến của đường cong (P_1) có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? ***(làm tròn đến hàng phần trăm)***



Lời giải tham khảo

Đáp án: 1,15

Ta xét ΔOAH có $x_P = AH.\cot t = 2r.\cot t$ (1)

Lại có $AOH = BAC = OCB = t$ với $OB = 2r.\sin t$, kéo theo có được $BD = 2r.\sin^2 t = \frac{2r}{1+\cot^2 t}$

Khi ấy ta suy ra: $BD = y_P = \frac{2r}{1+\cot^2 t}$ (2). Từ (1) và (2) ta rút ra quan hệ giữa y_P và x_P tức

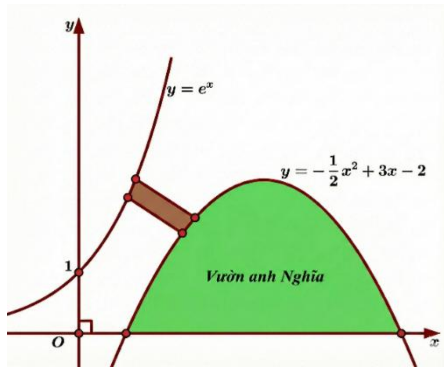
$$P(x;y) \in (P_1): y = \frac{2r}{1+\left(\frac{x}{2r}\right)^2} = \frac{8r^3}{x+4r^2} \xrightarrow{r=1} (P_1): y = \frac{8}{x^2+4}$$

Ta xét đạo hàm: $y' = -\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$, khi ấy hệ số góc lớn nhất khi y' max.

Xét $y' = -\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$ có $y'' = -\frac{64-48x^2}{\left(x^2+4\right)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\sqrt{3}}{8} \to \max y' = y'\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \boxed{\approx 1,15}$

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 69: Anh Nghĩa có một khu vườn được mô hình hóa trong mặt phẳng Oxy *(đơn vị mỗi trục là* $10m$*)* giới hạn bởi hàm *Parabol* $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-2$ và trục Ox *(Phần tô màu xanh).*



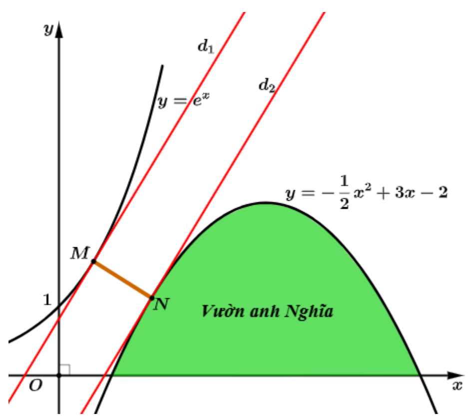
Bên cạnh đó có một con đường nhựa được mô hình hóa bằng hàm $y=e^x$. Anh Nghĩa muốn làm một con đường đi từ Vườn anh Nghĩa đến con đường nhựa đó. Hãy tính độ dài ngắn nhất của con đường mà anh Nghĩa muốn làm? ***(Đơn vị mét: làm tròn đến hàng phần trăm)***

Lời giải tham khảo

Đáp án: 9,91

Gọi $M \in y=e^x \Rightarrow M\left(a;e^a\right)$, $N\in(P)\Rightarrow N\left(b;-\frac{1}{2}b^2+3b-2\right)$

d_1 là tiếp tuyến của đồ thị $y=e^x$ tại M, d_2 là tiếp tuyến của đồ thị (P) tại N



$\Rightarrow MN\ge d\left(M,d_2\right)$ và $MN\ge d\left(N,d_1\right)$, Khi đó dấu "=" Xảy ra khi $\begin{cases} MN\perp d_1\\ MN\perp d_2\end{cases}$

Có nghĩa là tồn tại 2 tiếp tuyến của 2 đồ thị hàm số song song với nhau, suy ra hệ số góc 2 tiếp tuyến bằng nhau $\Rightarrow f'(a)=g'(b)\Leftrightarrow e^a=-b+3\Rightarrow b=3-e^a$

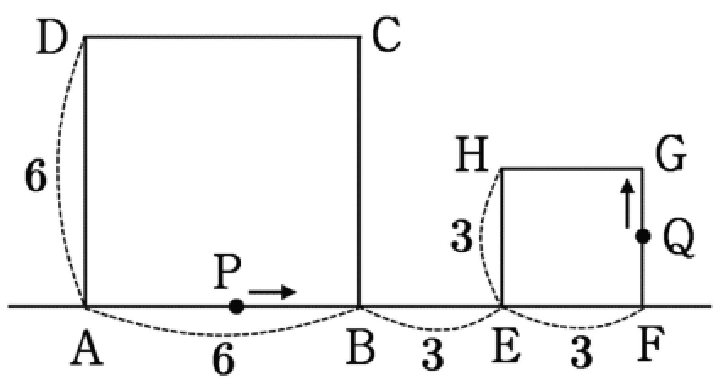
Khi đó tọa độ điểm $N\left(3-e^a;-\frac{1}{2}\left(3-e^a\right)^2+3\left(3-e^a\right)-2\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(3-e^a-a;-\frac{1}{2}\left(3-e^a\right)^2+3\left(3-e^a\right)-2-e^a\right)$$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{\left(3-e^a-a\right)^2+\left[-\frac{1}{2}\left(3-e^a\right)^2+3\left(3-e^a\right)-2-e^a\right]^2} \xrightarrow{Casio} \frac{d}{da} \longrightarrow a = 0,5013036....$$

Suy ra: $MN_{Min} = 0,99123722....$ Khi đó con đường ngắn nhất là $9,91m$.

Câu 70: Như hình vẽ, hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 6 và hình vuông $EFGH$ có độ dài cạnh bằng 3 được đặt trên đường thẳng AF.



Điểm P xuất phát từ điểm A, mỗi giây đi được 2 đơn vị dọc theo các cạnh của hình vuông $ABCD$ theo thứ tự $A \to B \to C \to D \to A \to \ldots$

Điểm Q xuất phát từ điểm F, mỗi giây đi được 1 đơn vị dọc theo các cạnh của hình vuông $EFGH$ theo thứ tự $F \to G \to H \to E \to F \to \ldots$

Biết rằng $BE = 3$. Hỏi tốc độ thay đổi của PQ^2 tại thời điểm 4 giây sau khi hai điểm P,Q lần lượt xuất phát từ A,F bằng bao nhiêu?

Lời giải tham khảo

Trả lời: 14

Khi biểu diễn tọa độ của P,Q sau t giây theo t, biểu thức sẽ khác nhau tùy theo khoảng của t, nên ta hãy tìm tọa độ của P,Q trong khoảng chứa $t = 4$.

Lấy điểm B làm gốc tọa độ, $\overrightarrow{BC}$ làm trục Oy, $\overrightarrow{BF}$ làm trục Ox.

Khi $3 \le t \le 6$, tọa độ của Q có thể viết là $(9-t;3)$.

Cũng trong khoảng $3 \le t \le 6$, tọa độ của P có thể viết là $(0;2t-6)$.

Đặt $PQ^2 = f(t)$ thì $f(t) = (t-9)^2 + (2t-9)^2, (3 \le t \le 6) = 5t^2 - 54t + 162 \Rightarrow f'(t) = 10t - 54$

Do đó $f'(4) = -14$.

Đề hỏi tốc độ nên ta lấy giá trị độ lớn là 14.

Câu 71: Trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị km), một chiếc drone cứu hộ được điều khiển từ điểm $A(0;0)$ để vận chuyển thuốc cứu trợ đến điểm $B(12;10)$. Trên đường bay, drone phải tránh một khu vực cấm bay, đó là hình tròn có tâm $C(6;6)$ với bán kính 5 đơn vị. Drone có thể chạm vào biên của khu vực cấm bay nhưng không được bay vào bên trong.

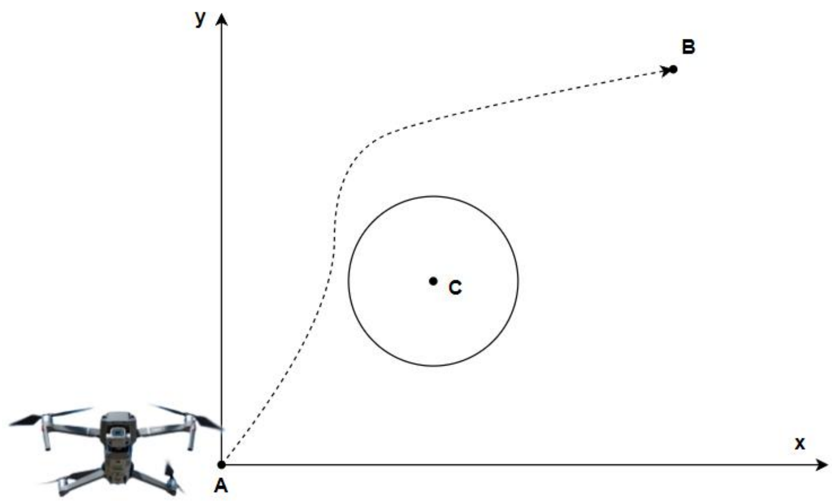
Các chế độ di chuyển của drone để tối ưu chi phí nhiên liệu:

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

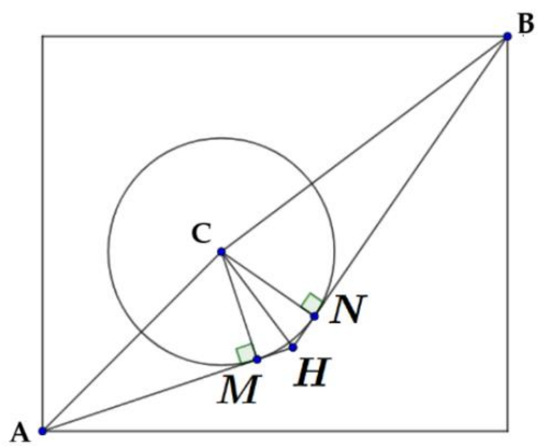
+) Chế độ tự động: Chiếc drone sẽ bay theo đường thẳng nhưng phải đổi hướng khi gặp vùng cấm bay. Chế độ này có chi phí nhiên liệu là **1 USD mỗi km**.

+) **Chế độ điều khiển tay**: Chiếc drone sẽ bay trên biên của vùng cấm, tức là bay theo một phần cung tròn. Chế độ này có chi phí nhiên liệu cao hơn, **1,5 USD mỗi km**.

Tính tổng chi phí nhiên liệu tối ưu nhất cho 2 chế độ bay của chiếc drone cứu hộ *(làm tròn đến hàng đơn vị, lưu ý chi tổng chi phí nhiên liệu tối ưu khi tổng quãng đường chiếc drone bay là tối ưu nhất)*



Lời giải tham khảo



Độ dài quãng đường đi tối ưu nhất của chiếc drone bay sẽ là tổng độ dài của *AM, BN* và độ dài cung tròn *MN* trong đó *M, N* là các tiếp điểm của các tiếp tuyến qua *A, B* của đường tròn tâm *C*

$$(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$$

Phương trình tiếp tuyến từ môt điểm bất kì $K(x_0;y_0)$ đến đường tròn $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ có dạng:

$$(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$$

Áp dụng:

Phương trình tiếp tuyến từ điểm $A(0;0)$ đến $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$

$$\Rightarrow (0-6)(x-6)+(0-6)(y-6)=25 \Rightarrow y=\frac{47}{6}-x \Rightarrow (x-6)^2+\left(\frac{47}{6}-x-6\right)^2=25 \Rightarrow AM=\sqrt{47}$$

Tương tự: Phương trình tiếp tuyến từ điểm $B(12;10)$ đến $(C):(x-6)^2+(y-6)^2=25$

$$\Rightarrow (12-6)(x-6)+(10-6)(y-6)=25 \Rightarrow y=\frac{85}{4}-\frac{3x}{2}$$

$$\Rightarrow (x-6)^2+\left(\frac{85}{4}-\frac{3x}{2}-6\right)^2=25 \Rightarrow BN=3\sqrt{3}$$

Độ dài cung tròn *MN:* $l_{MN}=r.\theta$ với r là bán kính đường (C), θ là góc nối ở tâm

Ta sẽ đi tính góc θ

$$\overrightarrow{CM}=\left(\frac{47+5\sqrt{47}}{12}-6;\frac{47-5\sqrt{47}}{12}-6\right),\quad \overrightarrow{CN}=\left(\frac{231}{26}+\frac{15\sqrt{3}}{13}-6;\frac{85}{4}-\frac{3\left(\frac{231}{26}+\frac{15\sqrt{3}}{13}\right)}{2}-6\right)$$

Và $\left|\overrightarrow{CM}\right|=\left|\overrightarrow{CN}\right|=r=5$

Ta có $\cos\theta=\cos\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CN}}{\left|\overrightarrow{CM}\right|\left|\overrightarrow{CN}\right|}\approx\dfrac{9,08447}{5.5}\Rightarrow\theta\approx 1,1989\ rad$

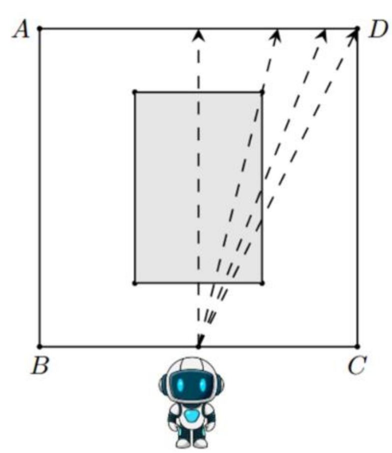
Suy ra $l_{MN}=r.\theta=5.1,1989=5,9945$

Vậy tổng chi phí nhiên liệu tối ưu nhất cho 2 chế độ bay của chiếc drone cứu hộ là:

$$C=1.\sqrt{47}+1.3\sqrt{3}+1,5.5,9945=21\ USD$$

Câu 72: Trên một khu đất hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng $200(m)$ đang diễn ra một cuộc thi.

Một đội thi sẽ khiến con Robot mà ban tổ chức cung cấp, xuất phát từ chính giữa cạnh AB, đi theo một đường thẳng và dẫn đến đích là một điểm bất kỳ trên cạnh CD. Ở chính giữa khu đất là một cái bãi cát hình chữ nhật có chiều dài $120(m)$ và chiều rộng $80(m)$.

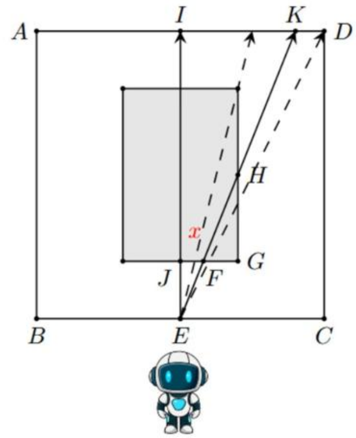


7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Vận tốc của con Robot khi đi trên mặt đất là $3(m/s)$ còn khi đi trên cát là $2(m/s)$. Gọi a là thời gian (tính theo giây) ngắn nhất mà con Robot đi đến đích. Khi đó giá trị $100a$ bằng bao nhiêu *(Kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)*?

Lời giải tham khảo

Đáp án: 8196



Đặt $JF = x \Rightarrow FG = JG - JF = 40 - x(m)$ và $EJ = \dfrac{200-120}{2} = 40(m) \Rightarrow FE = \sqrt{JF^2 + JE^2} = \sqrt{40^2 + x^2}$.

Vì $JE // HG \Rightarrow \dfrac{JF}{FG} = \dfrac{FE}{FH} \Rightarrow FH = \dfrac{FG \cdot FE}{JF} = \dfrac{(40-x)\sqrt{40^2+x^2}}{x}$.

Từ đó suy ra được: $t_{FH} = \dfrac{(40-x)\sqrt{40^2+x^2}}{2x}(s)$.

Vì $JF // IK \Rightarrow \dfrac{JF}{IK} = \dfrac{EJ}{EI} \Leftrightarrow \dfrac{JF}{IK} = \dfrac{40}{200} \Leftrightarrow IK = 5JF = 5x \Rightarrow EK = \sqrt{200^2 + 25x^2}(m)$.

Mà: $EK = EF + FH + HK \Leftrightarrow EF + HK = EK - FH = \sqrt{200^2+25x^2} - \dfrac{(40-x)\sqrt{40^2+x^2}}{x}$.

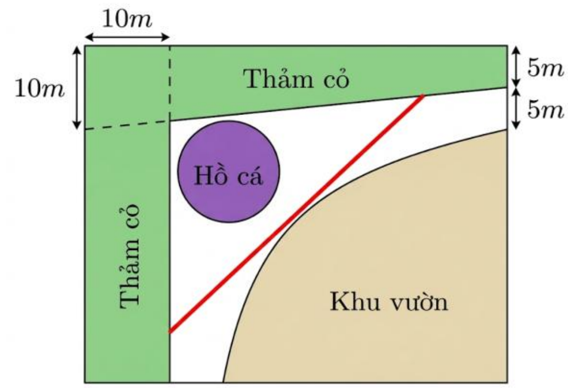
Vậy tổng thời gian mà con Robot đó đi là: $t = t_{FH} + t_{EF+HK}$.

$$\Leftrightarrow t = f(x) = \frac{(40-x)\sqrt{40^2+x^2}}{2x} + \frac{\sqrt{200^2+25x^2} - \dfrac{(40-x)\sqrt{40^2+x^2}}{x}}{3} \text{ (s).}$$

Casio$\left(\dfrac{d}{dx}\right) \Rightarrow t_{\min} = f(x)_{\min} \approx 81{,}96(s) = a \Rightarrow 100a \approx \boxed{8196}$.

Câu 73: Trong quá trình xây nhà anh Quang thấy sau khi hoàn thiện thì còn trống một mảnh đất có kích thước 40m × 50m (như hình vẽ). Trong đó phần giới hạn khu vườn và thảm cỏ có dạng là một hàm bậc hai chia bậc nhất và 2 đường tiệm cận của nó. Anh dự tính xây một con đường thẳng nối liền hai thảm cỏ lại với nhau (không được cắt qua khu vườn của mình) và phần còn trống anh dự định sẽ xây một chiếc hồ cá koi hình tròn (tham khảo hình vẽ). Theo khuyến cáo của các chuyên gia thì hồ cá anh có thể nuôi cá tối đa với mật độ 10 con cá giống/ m^2 để cá có thể sống khỏe mạnh phát triển bình thường. Số lượng cá tối đa anh Quang; có thể bỏ vào hồ để đảm bảo các điều kiện an toàn để cá phát triển bình thường là bao nhiêu.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Lời giải tham khảo

Đáp án: 2601

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O tại góc dưới bên trái của mảnh đất.

+) Chiều dài mảnh đất dọc theo trục hoành là 50m $x \in [0,50]$.

+) Chiều rộng mảnh đất dọc theo trục tung là 40m $y \in [0,40]$.

Phương trình đường cong giới hạn khu vườn: $y = \frac{1}{10}x + 30 - \frac{200}{x-10}$ (với $x > 10$)

Tiệm cận đứng: $x = 10$; Tiệm cận xiên: $y = \frac{1}{10}x + 30$. Giao điểm 2 tiệm cận là $I(10,31)$.

Phương trình tiếp tuyến (con đường thẳng) tại tiếp điểm có hoành độ m ($m > 10$):

$$y = \left(\frac{1}{10} + \frac{200}{(m-10)^2}\right)(x-m) + \frac{1}{10}m + 30 - \frac{200}{m-10}$$

Phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi 2 tiệm cận: $\begin{cases} \Delta_1 : y = \frac{1-\sqrt{101}}{10}x + 30 + \sqrt{101} \\ \Delta_2 : y = \frac{1+\sqrt{101}}{10}x + 30 - \sqrt{101} \end{cases}$

Dễ thấy tâm đường tròn nội tiếp của tam giác tạo bởi 2 đường tiệm cận và tiếp tuyến luôn nằm trên Δ_1.

Nên để diện tích hồ cá S_{max} thì tiếp tuyến phải vuông góc với Δ_1, hay nói cách khác là song song với Δ_2.

Nên ta có hệ số góc: $\frac{1}{10} + \frac{200}{(m-10)^2} = \frac{1+\sqrt{101}}{10} \Rightarrow \frac{200}{(m-10)^2} = \frac{\sqrt{101}}{10}$

$$\Rightarrow (m-10)^2 = \frac{2000}{\sqrt{101}} \Rightarrow m = 10 + \frac{20\sqrt{5}}{\sqrt[4]{101}}$$

Gọi ΔIAB là tam giác tạo bởi tiếp tuyến và 2 tiệm cận. Khi S_{ho} đạt max, ΔIAB cân tại I. Dựa vào VTCP $\vec{u}_1(0;1)$ và $\vec{u}_2(10;1)$ của hai tiệm cận, ta có góc tù α giữa chúng thỏa mãn: $\sin\alpha = \frac{10}{\sqrt{101}}$ và $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{101}}$.

Diện tích ΔIAB tạo bởi tiếp tuyến và 2 tiệm cận của đồ thị hàm số luôn là một hằng số: $S = 2 \times 200 = 400$.

Vì tam giác cân tại I nên: $S=\frac{1}{2}IA^2\sin\alpha \Rightarrow IA=IB=\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}=\sqrt{80\sqrt{101}}$.

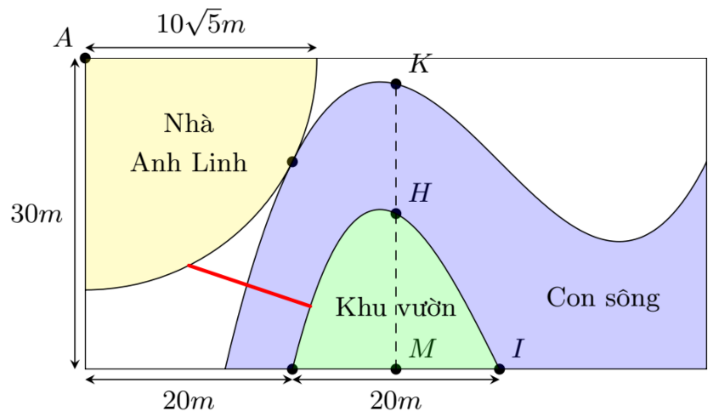
Áp dụng định lý hàm cosin cho cạnh đáy: $AB=\sqrt{IA^2+IB^2-2IA\cdot IB\cos\alpha}=\sqrt{160\sqrt{101}+160}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp (hồ cá): $r=\frac{S}{p}=\frac{400}{\sqrt{80\sqrt{101}}+\frac{1}{2}\sqrt{160\sqrt{101}+160}}\approx 8{,}10$ (m)

Diện tích hồ cá: $S_{ho}=\pi r^2\approx 206{,}15$ (m^2).

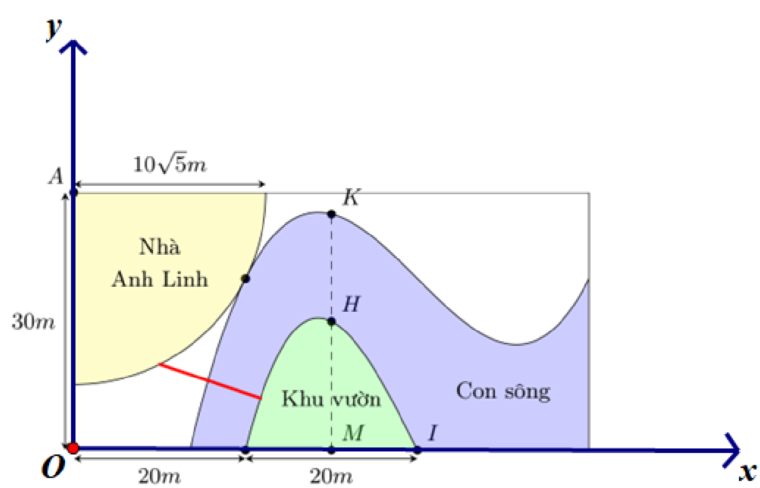
Với mật độ nuôi an toàn 10 con/m², số lượng cá tối đa anh Quang có thể nuôi là: $10\times 206{,}15=2061$ (con)

Câu 74: Cho một mảnh đất hình chữ nhật có các kích thước như hình vẽ. Biết nhà của anh Linh nằm trong 1 phần tư của đường tròn tâm A và khu vườn của anh Linh ở bên kia bờ sông được giới hạn bởi đường thẳng CD và một hàm bậc 3 $y=f(x)$ nhận I là tâm đối xứng. Bờ bên kia của bờ sông là một hàm số $g(x)$ sao cho kẻ một đường thẳng d vuông góc với CD tại M thì d sẽ cắt $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt tại H và K thỏa mãn $\frac{HM+40}{KM}=2$. Anh Linh muốn xây 1 con đường để nối từ nhà mình đến khu vườn, chiều dài ngắn nhất của cây cầu là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị). Biết rằng nhà anh Linh tiếp xúc với bờ sông.



Lời giải tham khảo

Trả lời: 7,8



Đặt hệ trục tọa độ Oxy với gốc O tại góc dưới bên trái mảnh đất, mỗi đơn vị trục ứng với 10m.

Phương trình đường tròn biểu diễn khu nhà là $x^2+(y-3)^2=5$, suy ra ranh giới phần nhà là cung tròn:

$$y=3-\sqrt{5-x^2} \text{ (với } x\in[0,2]).$$

Đồ thị $f(x)$ là hàm bậc ba nhận $I(4,0)$ làm tâm đối xứng và cắt trục hoành tại $(2,0)$ nên cũng đi qua $(6,0)$. Do đó, $f(x)=a(x-2)(x-4)(x-6)=a(x^3-12x^2+44x-48)$. Theo dữ kiện đề bài đã quy đổi khoảng cách (40m tương ứng 4 đơn vị), ta có tỷ lệ $\dfrac{f(x)+4}{g(x)}=2\Rightarrow g(x)=\dfrac{f(x)}{2}+2$.

Do nhà anh Linh tiếp xúc với bờ sông nên đồ thị cung tròn và $g(x)$ phải tiếp xúc với nhau. Dựa vào hình vẽ, tiếp điểm nằm tại ranh giới $x=2$. Tại hoành độ này, tung độ của cung tròn là $y(2)=2$ và đạo hàm là $y'(2)=2$

Để hai đường tiếp xúc, ta cần điều kiện $g'(2)=y'(2)\Rightarrow 4a=2\Rightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó chốt được hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}(x^3-12x^2+44x-48)$.

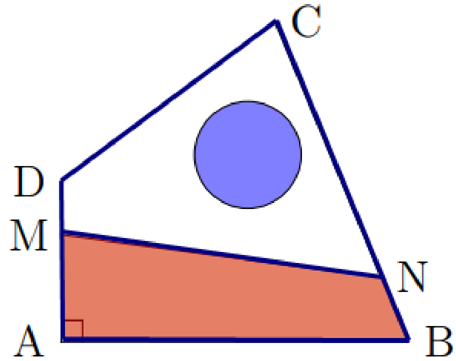
Chiều dài con đường ngắn nhất chính là khoảng cách từ một điểm M thuộc $f(x)$ đến đường tròn tâm $A(0,3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Gọi $M\left(x,\dfrac{1}{2}(x^3-12x^2+44x-48)\right)$, khoảng cách cần tìm là $d_{\min}=AM-R=\sqrt{x^2+(y_M-3)^2}-\sqrt{5}$.

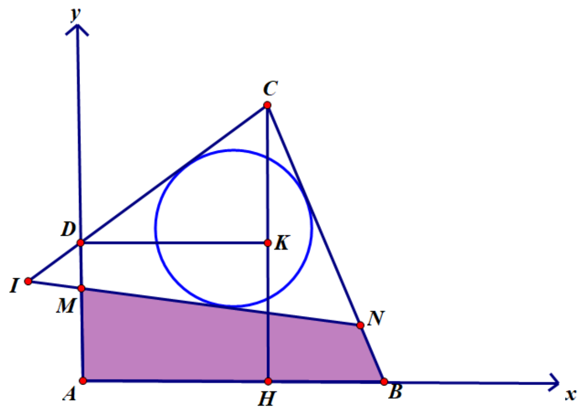
Sử dụng MTCT để dò giá trị nhỏ nhất của biểu thức trên khoảng $(2,4)$, ta thu được $d_{\min}\approx 0,77966$ đơn vị.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây cầu thực tế là khoảng 7,8m.

Câu 75: Anh Nam được tặng một mảnh đất hình tứ giác $ABCD$ trong đó phần $MNBA$ đã được trồng cỏ với các kích thước đo được là $AB=BC=13$, $AD=6$, $DC=10AM=4$, $NB=2,6$ như hình vẽ. Trên phần đất trống còn lại anh sẽ dự định xây một cái hồ cá hình tròn. Diện tích lớn nhất của hồ cá đó có thể xây được là bao nhiêu



Lời giải tham khảo



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, đặt $BH = x$ ta có.

$CH = \sqrt{13^2 - x^2} \Rightarrow CK = \sqrt{13^2 - x^2} - 6, AH = DK = 13 - x$

$\Rightarrow 10^2 = (13-x)^2 + \left(\sqrt{13^2 - x^2} - 6\right)^2 \Rightarrow x = 5$.

Vậy khi đó $C(8;12), D(0;6), M(0;4), \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{2,6}{13} \Rightarrow N(12;2,4)$.

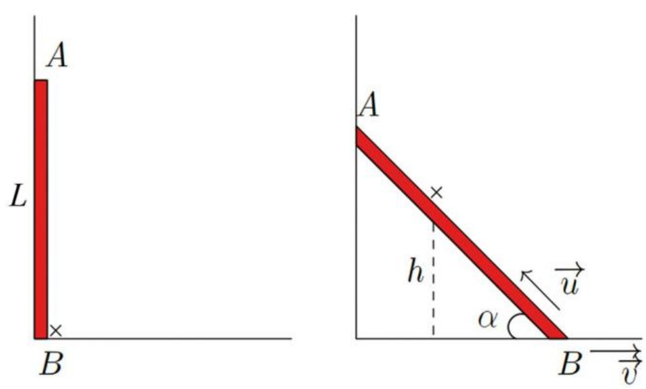
Gọi $I = DC \cap MN \Rightarrow I\left(-\dfrac{120}{53};\dfrac{228}{53}\right)$.

Hồ cá có S_{max} khi đường tròn nội tiếp tam giác CIN khi đó:

$$S_{CIN} = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IN}\right]}{\frac{1}{2}\left(IC + IN + CN\right)} \approx 3,4377$$

Vậy diện tích lớn nhất của hồ cá là: $S = \pi.r^2 \approx 37,1$

Câu 76: Một con kiến đậu ở đầu B của một thanh cứng mảnh AB có chiều dài $1,2$ mét đang dựng cạnh một bức tường thẳng đứng (hình vẽ). Vào thời điểm mà đầu B bắt đầu chuyển động sang phải theo sàn ngang với vận tốc không đổi $v = 0,4$ m/s thì con kiến bắt đầu bò dọc theo thanh với vận tốc không đổi $u = 0,2$ m/s đối với thanh. Trong quá trình bò trên thanh, con kiến đạt được độ cao cực đại h_{max} là bao nhiêu mét đối với mặt sàn? Cho đầu A của thanh luôn tỳ lên tường thẳng đứng.



Lời giải tham khảo

Gọi t là thời gian con kiến đi được, với $0 < t < \dfrac{AB}{u} = 6$

Khi B di chuyển một đoạn $S_1 = v \cdot t = 0,4t$ thì con kiến đi được $S_2 = u \cdot t = 0,2t$

Độ cao là hình chiếu vuông góc từ vị trí kiến đến mặt sàn, theo góc nghiêng α

Ta có: $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{AB^2 - S_1^2}}{AB} = \dfrac{\sqrt{1,44 - 0,16t^2}}{1,2}$

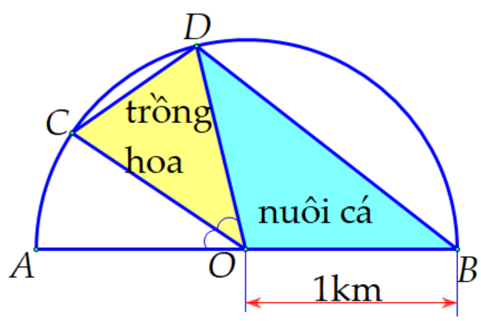
Khi đó, độ cao mà nó đạt được là: $h(t) = S_2 \cdot \sin\alpha = 0,2t \cdot \dfrac{\sqrt{1,44-0,16t^2}}{1,2} = \dfrac{1}{6} \cdot t \cdot \sqrt{1,44 - 0,16t^2}$

$$= \frac{5}{24} \cdot 2 \cdot 0,4t \cdot \sqrt{1,44 - 0,16t^2} \le \frac{5}{24} \cdot \left(0,16t^2 + 1,44 - 0,16t^2\right) = 0,3$$

Dấu bằng xảy ra khi $0,4t = \sqrt{1,44 - 0,16t^2} \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow t = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Vậy độ cao cực đại của con kiến đạt được so với mặt sàn là $0,3$ mét.

Câu 77: Để xây dựng thành phố văn minh toàn quốc, chính quyền thành phố quyết định cải tạo, làm đẹp một khu dân cư cũ trong nội đô.



Như hình, trong khu có một hồ nhân tạo hình nửa đường tròn, O là tâm, bán kính bằng 1km. Dự kiến trồng hoa trong miền ΔOCD và nuôi cá cảnh trong miền ΔOBD. Biết $AOC = COD$. Nếu diện tích tứ giác $OCDB$ lớn nhất thì $\cos AOC$ bằng bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần mười)*

Lời giải tham khảo

Trả lời: 0,6

Đặt $AOC = \theta$ thì $COD = \theta$. Theo hình vẽ suy ra $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Vì $OB = OD$ (cùng là bán kính) nên ΔOBD cân, do đó $ODB = OBD.$

Lại có $AOD = AOC + COD = 2\theta,$ mà $AOD = ODB + OBD$, nên $COD = ODB = OBD = \theta.$

Suy ra $OC // DB$. Do đó tứ giác $OCDB$ là hình thang.

Gọi S là diện tích hình thang $OCDB$. Khi đó $S = \dfrac{OC + BD}{2} \cdot h.$

Vì bán kính bằng 1 nên $OC = 1 \Rightarrow AB = 2$. Đồng thời trong tam giác vuông ABD có $OBD = \theta$, nên $BD = 2\cos\theta.$

Chiều cao hình thang bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song OC và DB, hay khoảng cách từ O đến BD, suy ra $h = \sin\theta.$

Vậy $S = \dfrac{1 + 2\cos\theta}{2}\sin\theta = \dfrac{1}{2}(\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta) = \dfrac{1}{2}(\sin\theta + \sin 2\theta), \quad \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right).$

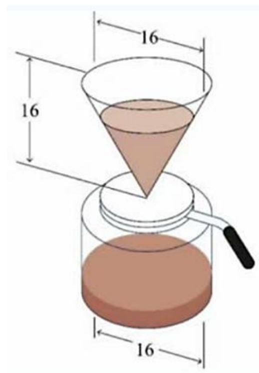
Đạo hàm: $S' = \frac{1}{2}(\cos\theta + 2\cos 2\theta) = \frac{1}{2}\left(4\cos^2\theta + \cos\theta - 2\right)$.

Cho $S' = 0$: $4\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$.

Vì $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\theta > 0$, nên nhận $\cos\theta = \frac{\sqrt{33}-1}{8}$.

Lập bảng xét dấu ta suy ra diện tích lớn nhất khi $\cos AOC = \frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 0,6$

Câu 78: Cà phê đang chảy từ bộ lọc hình nón vào bình cà phê hình trụ với tốc độ không đổi $160cm^3/s$. Bộ lọc hình nón có chiều cao bằng $16cm$ và đường kính bằng $16cm$, đường kính đáy của bình cà phê bằng $16cm$. Biết rằng thời điểm ban đầu lượng cà phê trong hình cao $12cm$ và trong bình trụ chưa có cà phê. Tại thời điểm chiều cao của cà phê trong hai bình bằng nhau thì chiều cao của cà phê trong bộ lọc thay đổi với vận tốc bao nhiêu cm/s (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)



Lời giải tham khảo

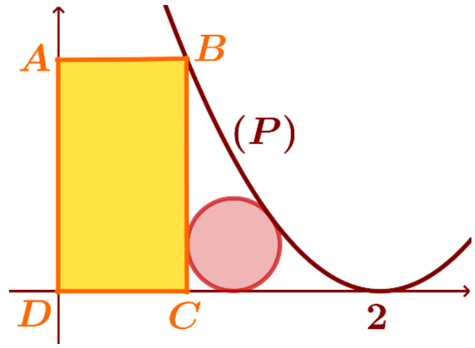
Tỉ lệ thể tích bằng lập phương tỉ lệ đồng dạng: $\frac{V_{CF\ BĐ}}{V_{Nón}} = \left(\frac{12}{16}\right)^3 <=> V_{CF\ BĐ} = \left(\frac{12}{16}\right)^3 . \frac{1}{3}.\pi.8^2.16 = 144\pi$.

Tại thời điểm chiều cao của cà phê trong hai bình bằng nhau:

$$V_{\Sigma} = V_{\text{nón}} + V_{\text{tru}} \Rightarrow 144\pi = \frac{\pi h^3}{12} + 64\pi h \Rightarrow h = stoA$$

Tại thời điểm chiều cao của cà phê trong hai bình bằng nhau thì thể tích bộ lọc bằng $V_{\text{nón}} = \frac{\pi h^3}{12}$ đạo hàm 2 vế thu được $h' \approx 41$

Câu 79: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P) tiếp xúc với trục hoành tại điểm $x = 2$ và cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 4. Một hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong phần hình phẳng tạo bởi $(P), Ox, Oy$ như hình vẽ. Khi diện tích của hình chữ nhật này đạt lớn nhất, người ta thiết kế thêm mô hình một đường tròn tiếp xúc với cạnh BC, trục Ox và (P) như trong hình. Xác định tổng diện tích của hình chữ nhật và hình tròn. (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Lời giải tham khảo

Pt parabol: $y=(x-2)^2$, gọi $B(x;(x-2)^2)\in(P)\Rightarrow S_{ABCD}=x(x-2)^2\Rightarrow S_{max}=\frac{32}{27}$ khi $x=\frac{2}{3}\Rightarrow B\left(\frac{2}{3};\frac{16}{9}\right)$

Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn $\Rightarrow I\in\Delta: y=x-\frac{2}{3}\Rightarrow I\left(a;a-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow R=a-\frac{2}{3}$

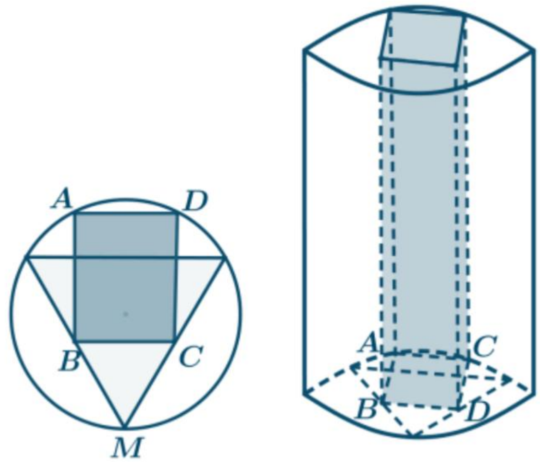
$(C):(x-a)^2+\left(y-a+\frac{2}{3}\right)^2=\left(a-\frac{2}{3}\right)^2\Rightarrow y=g(x)=a-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-(x-a)^2}$

Vì (C) tiếp xúc với (P) nên $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f'(x)=g'(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=a-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-(x-a)^2},(*) \\ 2(x-2)=\frac{-(x-a)}{\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-(x-a)^2}},(**)\end{cases}$

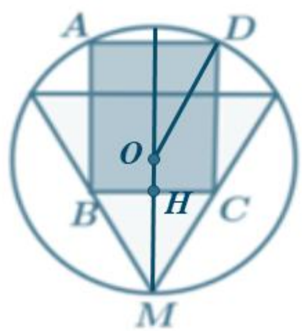
$$(**)\Rightarrow 2(x-2)=\frac{a-x}{(x-2)^2-a+\frac{2}{3}}\Leftrightarrow 2(x-2)^3-(2x-4)\left(a-\frac{2}{3}\right)=a-x\Rightarrow a=\frac{2(x-2)^3+\frac{2}{3}(2x-4)+x}{2x-3}$$

Thay a vào $(*)$ $\Rightarrow x\approx 1,28\Rightarrow a\approx 1,0009\Rightarrow R\approx 0,3343\Rightarrow S\approx \pi.0,3343^2+\frac{2}{3}.\frac{16}{9}\approx 1,536$

Câu 80: Người ta muốn đục từ khối trụ đặc bằng gỗ ra một khối hình hộp chữ nhật như hình vẽ. Biết rằng mặt cắt ngang của khối hộp chữ nhật là một hình chữ nhật $ABCD$ với hai đỉnh A,D thuộc đường tròn và hai đỉnh B,C thuộc hai cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn như hình vẽ. Biết rằng bán kính đường tròn đáy của khối trụ bằng 4m. Xác định diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$.



Lời giải tham khảo

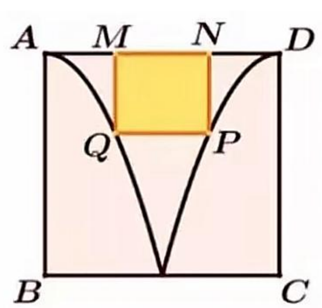


Đặt $OH = a$; $BC = 2b$. $AB = a + \sqrt{16 - b^2}$, $\tan 30^\circ = \dfrac{b}{MH} = \dfrac{b}{4-a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3}b = 4 - a \Rightarrow a = 4 - \sqrt{3}b \Rightarrow S = BC.AB = 2b\left(4 - \sqrt{3}b + \sqrt{16 - b^2}\right)$

Suy ra $b \approx 1.89$; Max ≈ 16.071

Câu 81: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4 và hai parabol P_1, P_2 lần lượt có đỉnh nằm tại A và D và cùng đi qua trung điểm của BC như hình vẽ. Một hình chữ nhật $MNPQ$ có cạnh MN nằm trên đoạn AD và hai đỉnh P và Q lần lượt nằm trên P_1 và P_2 như hình vẽ. Xác định diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$.



Lời giải tham khảo

Đặt hệ trục tọa độ tại B, $Oy \equiv BA; Ox \equiv BC$. Phương trình $(P): y = ax^2 + b$.

Đi qua $A(0;4)$ và $K(2;0)$ (K là giao điểm của 2 parabol). $\Rightarrow y = -x^2 + 4$.

$S_{MNPQ} = MN.MQ$.

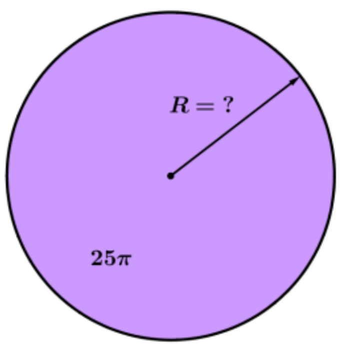
Để ý rằng M và N luôn đối xứng qua $x=2 \Rightarrow x_M + x_N = 4 \Rightarrow x_N = 4 - x_M$.

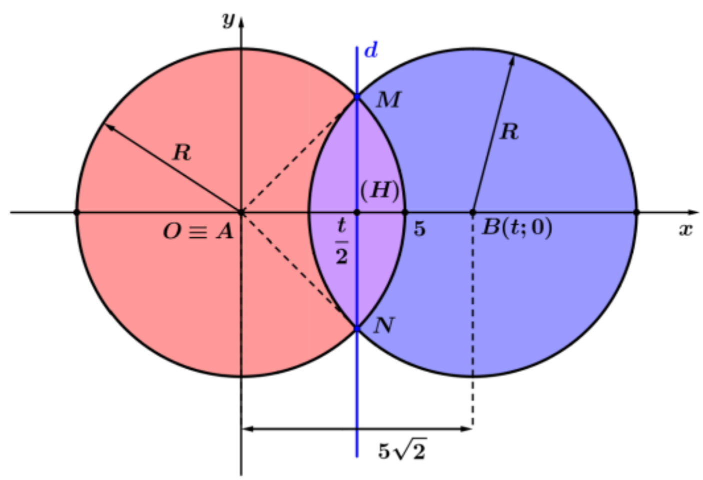
$$MN = x_N - x_M = 4 - 2x_M;\ MQ = 4 - y_M = 4 - \left(-x_M^2 + 4\right).$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = (4-2x_M).\left[4-\left(-x_M^2+4\right)\right] = S(x) \longrightarrow S(x) \le S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} \text{ (dvdt).}$$

Câu 82: Tuấn có hai tấm nhựa mỏng (bỏ qua độ dày), trong suốt, hình tròn và có cùng bán kính. Một tấm có màu đỏ và một tấm có màu xanh. Ban đầu Tuấn đặt hai tấm chồng lên nhau tạo thành một tấm hình tròn đồng tâm màu tím. Sau đó Tuấn tách hai tấm ra bằng cách kéo nhẹ tấm màu xanh trượt theo phương ngang với đường nối tâm của hai đường tròn với tốc độ $1cm/s$ sao cho hai tấm vẫn cùng nằm trên một mặt phẳng. Khi ấy Tuấn nhận thấy diện tích phần màu tím giảm theo một quy luật nhất định. Tính tốc độ giảm diện tích phần màu tím khi khoảng cách tâm của hai tấm nhựa ban đầu là $5\sqrt{2}$ cm. Biết rằng ban đầu diện tích phần màu tím là 25π *(cm²)* (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải tham khảo





Trước hết do diện tích màu tím bằng $25\pi(cm^2)$ nên suy ra bán kính hai tấm ban đầu là $5cm$.

Giả sử gọi A, B lần lượt là tâm của tấm kính hình tròn màu đỏ và màu xanh. Tiếp đến chọn hệ trục tọa độ Oxy với $O \equiv A$ và AB trùng với trục hoành như hình vẽ trên.

Gọi phần chung của hai tấm kính đỏ và xanh sau khi trượt tấm kính màu xanh ra ngoài là (H) và gọi d là đường thẳng đi qua 2 giao điểm của hai đường tròn (M, N) sau khi tách ra. Khi ấy ta nhận xét được đường thẳng d này chia (H) thành hai miền diện tích bằng nhau.

Ban đầu A, B trùng nhau tại gốc tọa độ. Sau khi tách, B cách A 1 khoảng bằng $t(cm)$, khi ấy ta gọi tọa độ $B(t;0)$ và đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{t}{2}$.

Goi $\alpha = (AM;Ox)$ thì: $\cos\alpha = \frac{t}{10} \to MAN = 2\arccos\frac{t}{10}(rad) \to l_{MAN} = l = 5.2\arccos\frac{t}{10}(cm)$

Diện tích quạt tròn quét góc ở tâm MAN là: $S_q = \frac{l.R}{2} = 5^2\arccos\frac{t}{10}(cm^2)$

Với $MN = 2\sqrt{25-\frac{t^2}{4}}$ ta suy ra: $S_{\Delta MAN} = \frac{1}{2}.d(A, MN).MN = \frac{t}{2}\sqrt{25-\frac{t^2}{4}}(cm^2)$

Gọi S_0 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung nhỏ thuộc đường tròn tâm màu đỏ và đường thẳng d và trục hoành, thì khi ấy diện tích miền (H) (kí hiệu là S) bằng:

$$S(t)=2S_0(t)=2(S_q-S_{\Delta MAN})=2\left(25\arccos\frac{t}{10}-\frac{t}{2}\sqrt{25-\frac{t^2}{4}}\right)=50\arccos\frac{t}{10}-t\sqrt{25-\frac{t^2}{4}}(cm^2)$$

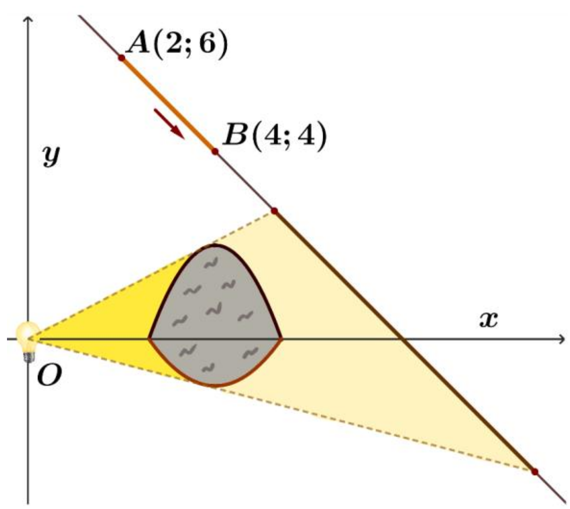
Với $y=\arccos u\rightarrow u=\cos y\rightarrow -u'=y'.\sin y=y'.\sqrt{1-\cos^2 y}=y'.\sqrt{1-u^2}\rightarrow y'=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Ta có: $S'(t)=\dfrac{-5}{\sqrt{1-\dfrac{t^2}{100}}}-\sqrt{25-\dfrac{t^2}{4}}+\dfrac{t^2}{4\sqrt{25-\dfrac{t^2}{4}}}=...=-\sqrt{100-t^2}$.

Vì diện tích giảm nên tốc độ tức thời (sự hao hụt của diện tích) phải âm, mà ta cần giá trị vận tốc dương nên suy ra: $v(t)=-S'(t)=\sqrt{100-t^2}$.

Thời điểm $AB=5\sqrt{2}cm$ tức $t=5\sqrt{2}cm$ có vận tốc là: $v(5\sqrt{2})=\sqrt{100-(5\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}(cm^2/s)$

Câu 83: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật thể được cấu tạo bởi 2 cổng parabol, phần trên là phần đồ thị nằm trên trục hoành của hàm số $f(x)=-(x-4)^2+2$, nửa dưới là phần âm của đồ thị hàm số $g(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2-1$. Một nguồn sáng đặt tại O chiếu sáng đẳng hướng, bóng của vật thể trải dài trên đường thẳng $d: y=-x+8$. Một đoạn thẳng AB di động trượt trên đường thẳng d với vận tốc không đổi $v=1$ (đơn vị độ dài/ giây). Tại thời điểm ban đầu, vị trí các điểm là $A(2;6)$ và $B(4;4)$. Hãy xác định khoảng thời gian đoạn thẳng này nằm hoàn toàn trong bóng tối *(kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)*.



Lời giải tham khảo

Trả lời: 5

Đường thẳng d đi qua $A(2;6)$ và $B(4;4)$ có phương trình là $y=-x+8$. Bóng tối của vật thể trải trên d được giới hạn bởi hai tia tiếp tuyến kẻ từ gốc $O(0;0)$ đến hai cổng parabol.

Ta xét đường thẳng đi qua gốc tọa độ $y=kx$.

Với phần trên $f(x)=-x^2+8x-14$, điều kiện tiếp xúc là phương trình $x^2+(k-8)x+14=0$ có nghiệm kép. Giải điều kiện $\Delta=(k-8)^2-56=0$, ta thu được $k=8-2\sqrt{14}$. Tương tự với phần dưới $g(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+7$, điều kiện tiếp xúc $\frac{1}{2}x^2-(k+4)x+7=0$ có nghiệm kép cho ta $k=-4+\sqrt{14}$.

Bóng tối trên đường thẳng d sẽ nằm giữa hai giao điểm của hai tia tiếp tuyến này với d. Thay $y=8-x$ vào hai phương trình tiếp tuyến, ta tìm được khoảng hoành độ của vùng bóng tối trên d là từ

$$x_1=\frac{8}{9-2\sqrt{14}}=\frac{72+16\sqrt{14}}{25} \text{ đến } x_2=\frac{8}{\sqrt{14}-3}=\frac{120+40\sqrt{14}}{25}.$$

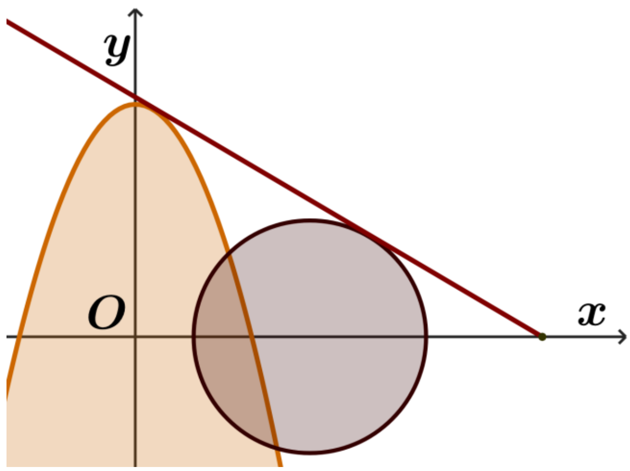
Đoạn thẳng AB di chuyển trượt trên d có độ dài hình chiếu xuống trục hoành luôn không đổi là $\Delta x_{AB}=x_B-x_A=2$. Để toàn bộ đoạn thẳng AB nằm hoàn toàn trong bóng tối, điểm A (điểm đi sau) phải đi vào vùng tối và điểm B (điểm đi trước) chưa thoát ra khỏi vùng tối. Điều này đồng nghĩa với hoành độ điểm A phải thỏa mãn: $x_1\le x_A\le x_2-2$.

Khoảng hoành độ mà điểm A có thể di chuyển hợp lệ là: $\Delta x=x_2-2-x_1=\frac{24\sqrt{14}-2}{25}\approx 3.51$

Do d có hệ số góc bằng -1, quãng đường thực tế mà đoạn thẳng AB di chuyển được trong bóng tối là:

$$S=\Delta x\sqrt{2}=\frac{48\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{25}\approx 4.97$$

Câu 84: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=-x^2+4$ và đường tròn C tâm $I(3;0)$, bán kính $R=2$. Một đường thẳng d, tiếp xúc với cả parabol (P) và đường tròn C, cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B. Hãy xác định hoành độ của điểm A (kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục).



Lời giải tham khảo

Trả lời: 6,9

Gọi đường thẳng d có dạng $y=ax+b \Leftrightarrow ax-y+b=0$.

Vì đường thẳng d tiếp xúc với parabol $y=-x^2+4$ cho nên phương trình hoành độ giao điểm giữa đường thẳng d và parabol có nghiệm kép:

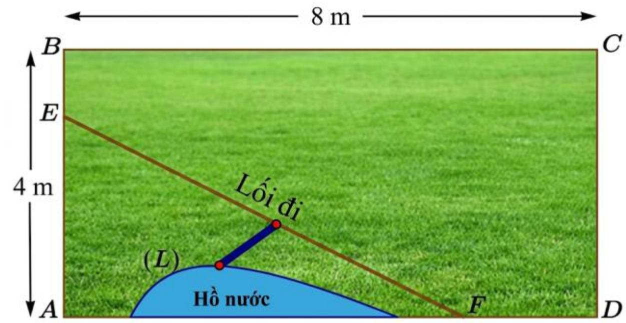
$$\Leftrightarrow ax+b=-x^2+4 \Leftrightarrow x^2+ax+b-4=0 \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta=a^2-4(b-4)=0 \Rightarrow b=\frac{a^2+16}{4}.$$

Vì đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn $(C) \Rightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|3a+b|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Leftrightarrow (3a+b)^2=4(a^2+1)$

Mà $b=\frac{a^2+16}{4} \Leftrightarrow \left(3a+\frac{a^2+16}{4}\right)^2=4(a^2+1) \Rightarrow a=-0,588621472$.

Do đó $b=4,086618809$. Khi đó hoành độ của điểm A là: $x=-\frac{b}{a}\approx 6,9$.

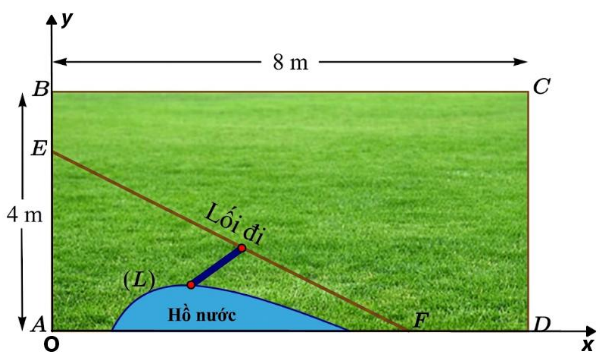
Câu 85: Ông Bách có một miến đất hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $8(m)$, chiều rộng $4(m)$. Trên mảnh đất ấy có một lối mòn EF (xem như đường thẳng) với $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}=\frac{3}{4}$.



Không biết từ bao giờ ở khu vực này đã có một hố nước tự nhiên, và một phần hố nước đó thuộc mảnh đất mà ông Bách đang sở hữu. Kỳ lạ thay đường cong (L) bao quanh hố nước chính là tập hợp các điểm M sao cho $d(M,AB)\times d(M,EF)=\sqrt{5}(m^2)$. Hỏi độ dài ngắn nhất từ lối đi đến hố nước là bao nhiêu.

Lời giải tham khảo

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



$AE=3, AF=6 \to F(6;0), E(0;3)$. Phương trình $EF: \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1 \Leftrightarrow x+2y-6=0$.

Gọi $M(x;y),(x,y>0) \longrightarrow \begin{cases} d(M,AB)=|x|=x \\ d(M,EF)=\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|x+2y-6|}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

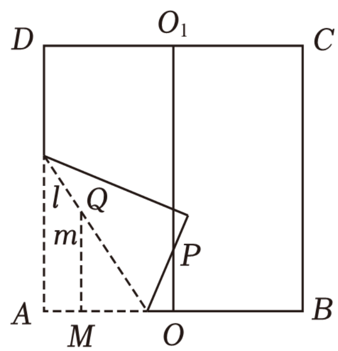
Mà $d\left(M,AB\right)\times d\left(M,EF\right)=\sqrt{5}\left(m^2\right)\Leftrightarrow x\dfrac{\left|x+2y-6\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow x\left|x+2y-6\right|=5$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\left(x+2y-6\right)=5\\x\left(x+2y-6\right)=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{x}-x+6\right) & (L)\\ y=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{5}{x}-x+6\right) & (C)\end{array}\right..$$

Vậy $\left(L\right):y=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{5}{x}-x+6\right)$.Khi đó $M\in\left(L\right)\Rightarrow M\left(x;\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{5}{x}-x+6\right)\right)$

Và $d\left(M;EF\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{x}$ với $1\le x\le5$. Giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 86: Như hình vẽ, cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$. Điểm O,O_1 lần lượt là trung điểm của AB,CD. Điểm P nằm trên đoạn OO_1, sao cho $OP=2$.Gấp tờ giấy theo phương thức chỉ ra ở Hình: gấp sao cho đoạn thẳng AB (phần bị gấp lên) đi qua điểm P; gọi điểm trên AB trùng với P sau khi gấp là M, nếp gấp gọi là l.



Qua M lại gấp một nếp m song song với BC và cắt nếp l tại Q. Tiếp tục lặp lại thao tác trên nhiều lần, quỹ tích các điểm Q là một đường cong E. Tiếp tuyến của E tại điểm Q cắt AB tại N. Hỏi diện tích nhỏ nhất của tam giác ΔPQN bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

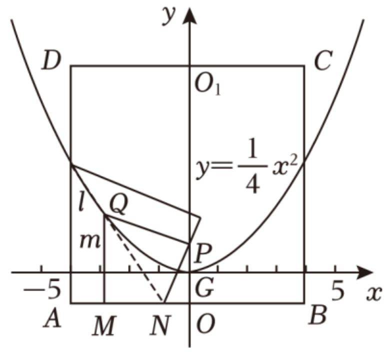
Lời giải tham khảo

Phân tích:

Nối PQ, do PQ đối xứng với MQ qua l nên $PQ=QM$. Lấy Q làm tiêu điểm, AB làm đường chuẩn, ta được quỹ tích của Q là một parabol. Viết phương trình parabol, dùng đạo hàm tìm tiếp tuyến tại Q, từ đó biểu diễn diện tích ΔPQN theo hoành độ của Q, rồi xét tính đơn điệu của hàm số đó để tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích.

Đáp án: 1,54

Nối PQ. Vì PQ và MQ đối xứng qua nếp gấp l nên $PQ=QM$. Do đó, nếu coi P là tiêu điểm, đường thẳng AB là đường chuẩn thì quỹ tích của Q chính là một parabol.



Lấy trung điểm G của đoạn PO làm gốc tọa độ. Đường thẳng song song với AB qua G làm trục Ox, đoạn OO_1 làm trục Oy. Khi đó $P(0;1)$, đường thẳng AB có phương trình $y=-1$. Gọi $Q(x;y)$ là một điểm bất kỳ trên parabol.

+) Khoảng cách từ Q đến tiêu điểm $P(0;1)$: $QP=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

+) Khoảng cách từ Q đến đường chuẩn $y=-1$:

Vì đường thẳng có dạng $y=-1$, nên khoảng cách là $d\left(Q;AB\right)=\left|y-\left(-1\right)\right|=\left|y+1\right|$.

Với điểm Q của parabol ta đang xét, $y>-1$ (coi parabol nằm phía trên đường chuẩn), nên:
$d\left(Q,AB\right)=y+1$

Từ định nghĩa parabol (khoảng cách đến tiêu điểm = khoảng cách đến đường chuẩn) $QP=d\left(Q,AB\right)$, ta được phương trình parabol: $x^2=4y\Rightarrow y=\frac{1}{4}x^2$. Lấy đạo hàm: $y'=\frac{1}{2}x$

Gọi $Q\left(a;\frac{1}{4}a^2\right)$ là một điểm bất kỳ trên parabol, hệ số góc tiếp tuyến tại Q là $k=\frac{1}{2}a$.

Phương trình tiếp tuyến tại Q: $y-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{2}a(x-a)\Rightarrow y=\frac{1}{2}a(x-a)+\frac{1}{4}a^2$.

Tiếp tuyến này cắt đường thẳng $AB: y=-1$ tại điểm $N\left(-\frac{2}{a}+\frac{a}{2};-1\right)$.

Suy ra $MN=\left|-\frac{2}{a}+\frac{a}{2}-a\right|=\frac{2}{a}+\frac{a}{2},(a<0)$.

Diện tích tam giác $\Delta APQN$ bằng $S_{\Delta APQN}=\frac{1}{2}MN.MQ=\frac{1}{2}MN.PQ$ (do $MQ=PQ$). Từ hình vẽ và tính toán ta có $MQ=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{a}+\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)$, suy ra $S_{\Delta APQN}=\frac{1}{16}a^3+\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$

Đặt $H(a)=\frac{1}{16}a^3+\frac{a}{2}+\frac{1}{a},(a<0)$. Ta có $H'(a)=\frac{3}{16}a^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{a^2}$.

Giải phương trình $H'(a)=0$ được $H'(a)=0\Leftrightarrow a=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

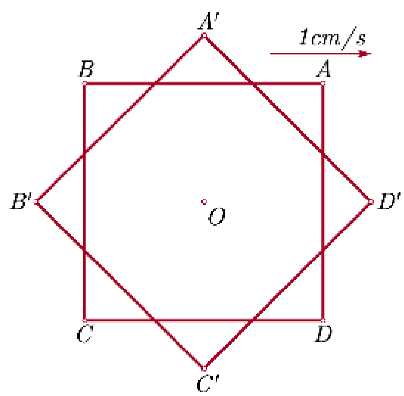
Vì $a<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ thì $H'(a)<0$; khi $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<a<0$ thì $H'(a)>0$.

Do đó, $H(a)$ giảm trên $\left(-\infty;-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ và tăng trên $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};0\right)$, nên tại $a=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

hàm $H(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất: $H_{\min}=\dfrac{1}{16}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)+\dfrac{1}{-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất của tam giác ΔPQN là $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\approx 1,54$.

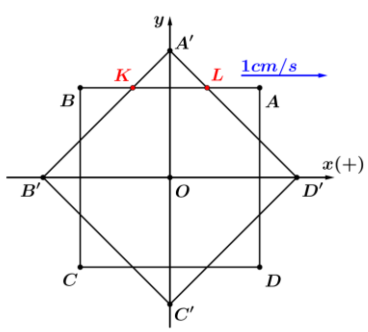
Câu 87: Trên bàn học có 2 mảnh kính hình vuông đồng tâm đều có cạnh là $4cm$. Trong đó có 1 mảnh kính bị lệch đi $45°$ so với mảnh kính ở dưới. Do dính mưa nên 2 mảnh kính bị dính lại với nhau nên bạn Tuấn tách mảnh kính phía trên với tốc độ $1cm/s$ theo hướng $\overrightarrow{BA}$. Hãy tính tốc độ thay đổi ***tức thời*** diện tích của phần bị trùng giữa 2 kính tại thời điểm $t=1s$.

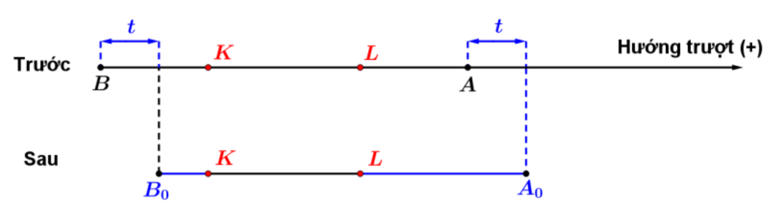


Lời giải tham khảo

Đáp số: 4

Trước hết ta chọn hệ trục Oxy cho mô hình ban đầu đề bài đã đề cập. Khi ấy ta lần lượt có hai hình vuông là $ABCD$ và $A'B'C'D'$





Gọi $A(2;2)$ thì khi ấy ta có $\boxed{A'\left(0;2\sqrt{2}\right)}$. Thực hiện tương tự cho ba điểm còn lại, ta có:

$B(-2;2)\to\boxed{B'\left(-2\sqrt{2};0\right)};C(-2;-2)\to\boxed{C'\left(0;-2\sqrt{2}\right)};D(2;-2)\to\boxed{D'\left(2\sqrt{2};0\right)}$

Tiếp đến gọi K,L lần lượt là giao điểm của AB với $A'B'$ và $A'D'$

Khi ấy ta có phương trình đường thẳng $A'B':y=x+2\sqrt{2}\Rightarrow K\left(2-2\sqrt{2};2\right)\Rightarrow K\left(2\sqrt{2}-2;2\right)$ (Do K,L đều đối xứng với nhau qua $C'A'$). Từ đây ta suy ra $KB=LA=4-2\sqrt{2}\,(cm)$

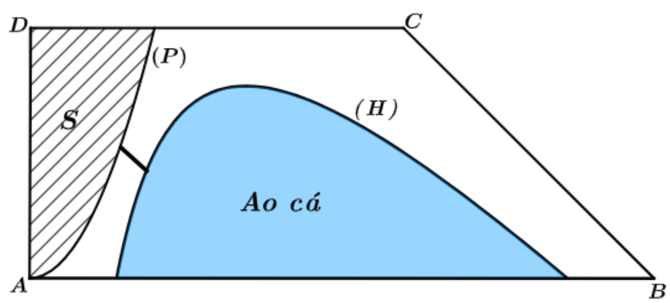
Ta có: $t=1$ và $0<1<4-2\sqrt{2}$. Dễ thấy rằng khi di chuyển $A'B'C'D'$ cũng tương đương với việc di chuyển $ABCD$. Do tính đối xứng, nên ta có: $B_0K = BK - t$ và $LA_0 = LA + t$ với A_0, B_0 lần lượt là hai điểm mới của A, B sau khi di chuyển.

Mặt khác B_0K và LA_0 là các cạnh góc vuông của tam giác vuông cân của phần không trùng nên khi gọi S_0 là diện tích ban đầu tại $t=0$ thì ta suy ra được diện tích tại thời điểm t là:

$$S(t) = S_0 + 2\left(\frac{BK^2}{2} - \frac{(BK-t)^2}{2}\right) - 2\left(\frac{(LA+t)^2}{2} - \frac{LA^2}{2}\right)$$

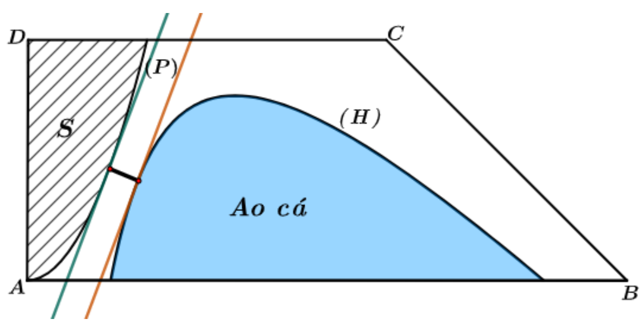
Khi ấy ta suy ra: $S'(t) = 2\left[BK - t - (LA+t)\right] = -4t$ (do $BK = LA$) tức tốc độ thay đổi diện tích của phần bị trùng giữa 2 kính tại thời điểm $t = 1s$ là $V(1) = S'(1) = -4.1 = -4\,cm^2/s$.

Câu 88: Anh Nghĩa có một khu đất hình thang vuông $ABCD$ với $AB = 100$ (m), $DC = 60$ (m) và $AD = 40$ (m). Anh ấy đã đào một cái hồ để nuôi cá, hồ được bao bởi cạnh AB và một phần của đường cong $(\mathcal{H})$, biết rằng $(\mathcal{H})$ chứa các điểm K sao cho tích khoảng cách từ K đến AD và BC luôn bằng $600\sqrt{2}$ (m). Anh nghĩa xây thêm một nhà kho để chứa thức ăn cho cá được tạo bởi cạnh AD, DC và đường cong Parabol (P) có đỉnh A, biết rằng phần đất để xây nhà kho có diện tích $S = \frac{1600}{3}(m^2)$. Anh nghĩa suy nghĩ và muốn xây một con đường thẳng đi từ nhà kho đến ao cá để vận chuyển thức ăn cho cá. Hãy tính độ dài con đường ngắn nhất? *(Đơn vị: mét, làm tròn đến hàng phần trăm)*



Lời giải tham khảo

Đáp án: 5,23



Xem $10m = 1$ đơn vị trên trục số, gắn hệ trục toạ độ sao cho $A(0;0)$, $B(10;0)$, $C(6;4)$, $D(0;4)$.

Ta có $BC: y = -x + 10$, gọi $M(x;y)$ thì $d(M, AD) = |x| = x > 0$ và $d(M, BC) = \frac{|x+y-10|}{\sqrt{2}}$

Suy ra : $x.\frac{|x+y-10|}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow y = -x + 10 \pm \frac{12}{x}$. Do có 2 cực trị nên $y = -x + 10 - \frac{12}{x}$.

Ta có $(P): y = ax^2$ mà $S = \frac{1600}{3}(m^2)$ suy ra diện tích trên trục số $S = \frac{16}{3} = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}} (4 - ax^2)dx \Rightarrow a = 1$.

Khi đó $(P): y = x^2$.

Gọi $M\left(m;m^2\right)$ thuộc đồ thị $(P): y = x^2$ và $N\left(n;-n+10-\dfrac{12}{n}\right)$ thuộc đồ thị $(H): y = -x+10-\dfrac{12}{x}$.

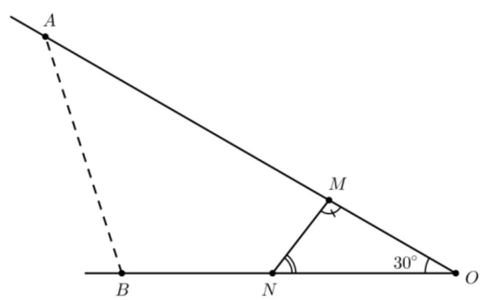
Gọi d_1 là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (P) tại điểm M, d_2 là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (H) tại N. Ta có $MN \geq d\left(M, d_2\right)$, $MN \geq d\left(N, d_1\right)$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $MN \perp d_1$, $MN \perp d_2$. Khi đó $d_1 // d_2$ hay hệ số góc của tiếp tuyến tại M và N bằng nhau. Khi đó ta có: $m = \dfrac{-1}{2}+\dfrac{6}{n^2} \in [0;2] \Rightarrow n \in \left[\dfrac{2\sqrt{15}}{5}; 2\sqrt{3}\right]$

$$D(n) = \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}-\frac{6}{n^2}\right)^2+\left(-n+\frac{39}{4}-\frac{12}{n}+\frac{6}{n^2}-\frac{36}{n^4}\right)^2}, \forall n \in \left[\frac{2\sqrt{15}}{5}; 2\sqrt{3}\right]$$

Khi đó Min bằng $D_{\min} = 0,522768$ tại $n = 1,813486$. Vì đơn vị mỗi trục là $10m$ nên con đường ngắn nhất là $0,522768 \times 10 = 5,22768 \approx 5,23(m)$

Câu 89: Hai chất điểm A và B chuyển động thẳng đều cùng hướng về O với vận tốc $V_B = \dfrac{V_A}{\sqrt{3}}$ và $AOB = 30^\circ$ như hình vẽ. Biết rằng khi khoảng cách giữa hai chất điểm A và B là nhỏ nhất thì $BAO = \varphi = ?$ (đơn vị độ).



Lời giải tham khảo

Có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{V_A}.t \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{V_A}.t + \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{V_B}.t \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{V_B}.t + \overrightarrow{OB}$, suy ra $MN^2 = \left(\left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)t - \overrightarrow{AB}\right)^2$.

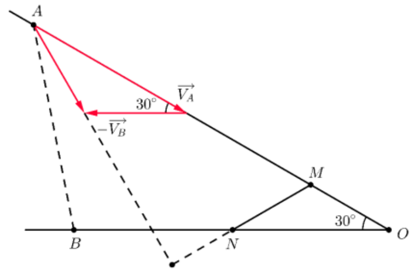
Xét hàm số $f(t) = \left(\left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)t - \overrightarrow{AB}\right)^2$, có $f'(t) = 2\left(\left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)t - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)$.

Hướng 1: Có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right|^2} \Leftrightarrow t = \dfrac{OA\sqrt{3}-OB}{2V_A}\sqrt{3}$, suy ra $OM = MN = \dfrac{\left|OA - OB\sqrt{3}\right|}{2}$.

Khi đó, $BAO = 120^\circ$.

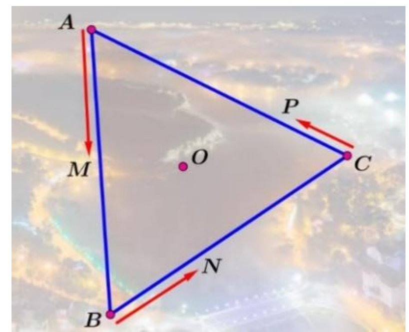
Hướng 2: Có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \perp \left(\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)$.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Khi đó, $\dfrac{V_A}{\sin\left(\overrightarrow{V_B},\overrightarrow{V_B}-\overrightarrow{V_A}\right)}=\dfrac{V_B}{\sin\left(\overrightarrow{V_A},\overrightarrow{V_A}-\overrightarrow{V_B}\right)}\Leftrightarrow\dfrac{V_A}{\sin\left(240^\circ-\varphi\right)}=\dfrac{V_B}{\sin\left(\varphi-90^\circ\right)}\Leftrightarrow\varphi=120^\circ$.

Câu 90: Một công ty du lịch muốn quảng bá Tour du lịch đặc biệt của họ đến với du khách bằng cách thiết kế một banner quảng cáo như hình vẽ. Điểm nhấn trên banner là một tam giác đều có cạnh bằng 1 mét với ba đỉnh A,B,C tương ứng với 3 địa danh mà công ty này muốn nói đến. Họ thiết kế các chuỗi đèn LED chạy từ A đến B, từ B đến C và từ C đến A; trong đó: chùm sáng chạy từ A đến B (ta xem là điểm M di động) với vận tốc 3 cm/s, chùm sáng chạy từ B đến C (ta xem là điểm N di động) với vận tốc 2 cm/s, chùm sáng chạy từ C đến A (ta xem là điểm P di động) với vận tốc 1 cm/s. Mỗi dao động được tính kể từ khi cả ba chùm sáng cùng xuất phát cho đến khi chùm sáng cuối cùng về đích. Biết O là trọng tâm tam giác đều ABC, tính tổng khoảng cách ngắn nhất $OM+ON+OP$ theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần trăm (trong một dao động).



Lời giải tham khảo

Đáp án: 1,03

Cách 1: Gốc tọa độ tại trung điểm BC

Đặt $A\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),B\left(-\dfrac{1}{2},0\right),C\left(\dfrac{1}{2},0\right)\Rightarrow O\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ (m).

$M(t)=A+0,03t(B-A),N(t)=B+0,02t(C-B),P(t)=C+0,01t(A-C)$ (vì cạnh = 1 m).

Xét $S(t)=OM+ON+OP$ trên $[0,25]$ (trước khi N tới đích).

Giải $S'(t)=0$ được $t\approx21,03$ s và $S_{\min}\approx1,03$ m

Cách 2: Trong tam giác đều ABC cạnh $a=1\text{m}$, O là trọng tâm. Khoảng cách từ O đến các đỉnh là $OA=OB=OC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{m}$ và góc $OAM=30^\circ$.

Sau thời gian t, các quãng đường đi được là $AM=0,03t,BN=0,02t,CP=0,01t$.

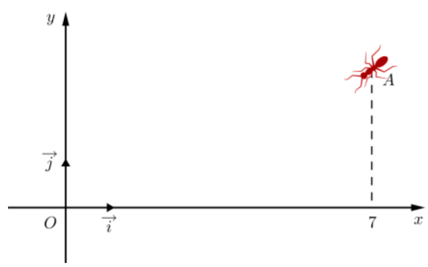
Áp dụng định lý cosin: $OM^2=OA^2+AM^2-2.OA.AM.\cos\left(30^\circ\right)=0,0009t^2-0,03t+\dfrac{1}{3}$. Tương tự cho ON^2 và OP^2. Tiếp đó ta nhận thấy $\left(OM^2+ON^2+OP^2\right)_{\max}\leftrightarrow\left(OM+ON+OP\right)_{\max}$

$$S=OM^2+ON^2+OP^2\Rightarrow S(t)=\left(0,0009t^2-0,03t+\frac{1}{3}\right)+\left(0,0004t^2-0,02t+\frac{1}{3}\right)+\left(0,0001t^2-0,01t+\frac{1}{3}\right)$$

$S(t)=0,0014t^2-0,06t+1$, đây là một parabol có giá trị nhỏ nhất tại đỉnh $t=\dfrac{-(-0,06)}{2\cdot 0,0014}=\dfrac{150}{7}$ giây.

Tổng khoảng cách ngắn nhất: $L_{\min}=\dfrac{\sqrt{61}+\sqrt{52}+\sqrt{97}}{\sqrt{588}}\approx\dfrac{7.810+7.211+9.849}{24.249}\approx 1.03$ m.

Câu 91: Chú kiến bị lạc tổ, chú đang loay hoay để tìm tổ. Chú đi theo suy đoán và đặt hệ trục toạ độ Oxy thì đường đi của chú có quỹ đạo là một phần đường cong đồ thị của hàm số có công thức $f(x)=a(x-b)^2$ (với a,b là các số thực dương). Với số thực k, hàm số $g(k)=\max\limits_{[k;k+2]}f(x)-\min\limits_{[k;k+2]}f(x)$ thoả mãn $g(3)=a$ và $g(2)+g(6)=32$. Biết tổ của chú nằm ngay tại gốc toạ độ O. Thời điểm 9h sáng chú đang ở vị trí A như hình vẽ. Khoảng cách giữa chú kiến và tổ của mình là bao nhiêu? *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*



Lời giải tham khảo

Đáp án: 19,3

Hàm số $f(x)=a(x-b)^2$ (với $a>0$) biểu diễn một parabol có đỉnh $I(b;0)$ nằm trên trục hoành.

Xét $g(3)=\max_{[3;5]}f(x)-\min_{[3;5]}f(x)$. Nếu đỉnh I nằm ngoài khoảng $(3;5)$, hàm số sẽ hoàn toàn đơn điệu trên đoạn này, dẫn đến $g(3)=|f(5)-f(3)|=4a|4-b|$. Phương trình $4a|4-b|=a\Rightarrow|4-b|=0,25$ cho các nghiệm $b=3,75$ hoặc $b=4,25$. Cả hai nghiệm này lại đều lọt vào khoảng $(3;5)$, tự sinh ra mâu thuẫn. Do vậy, đỉnh I bắt buộc phải nằm bên trong đoạn $[3;5]$.

Khi đỉnh nằm trong đoạn $[3;5]$, giá trị nhỏ nhất chắn chắn là $f(b)=0$, và giá trị lớn nhất đạt tại một trong hai đầu mút $f(3)$ hoặc $f(5)$. Từ giả thiết $g(3)=a$, ta suy ra:

$$a\cdot\max\left\{(3-b)^2,(5-b)^2\right\}=a\Leftrightarrow\max\left\{|3-b|,|5-b|\right\}=1$$

Điều kiện khoảng cách này chỉ được thoả mãn duy nhất tại $b=4$.

Với $b=4$, ta có $f(x)=a(x-4)^2$.

Tiếp tục khai thác giả thiết thứ hai, ta xét sự biến thiên trên các đoạn tương ứng:

- Trên đoạn $[2;4]$, hàm nghịch biến về 0 nên $g(2)=f(2)-f(4)=4a$.
- Trên đoạn $[6;8]$, hàm đồng biến đi lên nên $g(6)=f(8)-f(6)=16a-4a=12a$.

Thay vào phương trình $g(2)+g(6)=32$, ta có: $4a+12a=32\Rightarrow 16a=32\Rightarrow a=2$

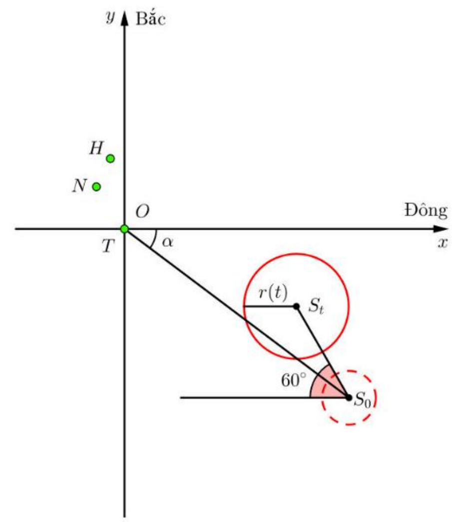
7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Quỹ đạo đường đi được xác định hoàn toàn với công thức $f(x)=2(x-4)^2$. Dựa vào hình vẽ, vị trí điểm A của chú kiến có hoành độ $x_A=7$. Tung độ tương ứng là $y_A=f(7)=2(7-4)^2=18$.

Khoảng cách từ chú kiến $A(7;18)$ đến tổ ngay tại gốc toạ độ $O(0;0)$ được tính bằng định lý Pythagore:

$$OA=\sqrt{7^2+18^2}=\sqrt{49+324}=\sqrt{373}\approx 19,3$$

Câu 92: Miền Trung Việt Nam vốn luôn phải oằn mình chống chọi với thiên tai. Giả sử trong một đợt áp thấp nhiệt đới mạnh lên thành bão, Trung tâm Dự báo Khí tượng Thủy văn Quốc gia phát đi thông báo khẩn về cơn bão số 4 có tên quốc tế là Sao La. Trên bản đồ quy hoạch phòng chống thiên tai được gắn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị đo là 10km (hướng Đông là trục Ox, hướng Bắc là trục Oy), vị trí ba thành phố trọng điểm là Hà Tĩnh, Vinh (Nghệ An) và Thanh Hóa được xác định lần lượt tại các điểm $T(0;0)$, $N(-2;3)$ và $H(-1;5)$. Tại thời điểm bản tin phát đi, tâm bão Sao La đang ở ngoài khơi Biển Đông, cách thành phố Hà Tĩnh 200km. Vị trí tâm bão nằm ở hướng Đông Nam so với Hà Tĩnh, tạo với phương Đông một góc α sao cho $\cos\alpha=0,8$. Cơn bão di chuyển phức tạp theo hướng Tây Bắc lệch 60° so với hướng Tây với vận tốc 20km/h. Sức tàn phá của bão rất lớn với vùng nguy hiểm là một hình tròn có bán kính ban đầu 20km và liên tục mở rộng thêm 10km mỗi giờ. Để lên phương án sơ tán dân cư đồng bộ, Ban chỉ đạo cần biết khoảng thời gian mà cả 3 thành phố này cùng nằm trong vùng nguy hiểm của bão Sao La kéo dài bao nhiêu giờ? *(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)*



Lời giải tham khảo

Đáp án: 10,8

Ta quy đổi các số liệu về hệ quy chiếu của bản đồ: Đơn vị độ dài là 10km, đơn vị thời gian là giờ.

Khi đó vận tốc bão $v=2$. Bán kính vùng bão ban đầu $R_0=2$, tốc độ tăng $v_R=1$.

Vị trí tâm bão ban đầu S_0 có khoảng cách đến T là 20, nằm ở góc phần tư thứ IV với $\cos\alpha=0,8$, suy ra $S_0(16;-12)$. Véc-tơ vận tốc hướng Tây Bắc lệch 60° Bắc (tạo góc 120° với Ox) là $\vec{v}=\left(-1;\sqrt{3}\right)$.

Ta có phương trình chuyển động của tâm bão $S(t)$ và bán kính vùng nguy hiểm $R(t)$ tại thời điểm t:

$$\begin{cases} S(t)=\left(16-t;-12+\sqrt{3}t\right) \\ R(t)=2+t \end{cases}$$

Ta có điều kiện để Hà Tĩnh (T) nằm trong vùng nguy hiểm: $(16-t)^2+\left(\sqrt{3}t-12\right)^2\le(t+2)^2$

Suy ra: $7,0004\le t\le 18,8560$

Ta có điều kiện để thành phố Vinh (N) nằm trong vùng nguy hiểm: $(18-t)^2+\left(\sqrt{3}t-15\right)^2\le(t+2)^2$

Suy ra: $8,0298\le t\le 22,6240$

Ta có điều kiện để Thanh Hóa (H) nằm trong vùng nguy hiểm: $(17-t)^2+\left(\sqrt{3}t-17\right)^2\le(t+2)^2$

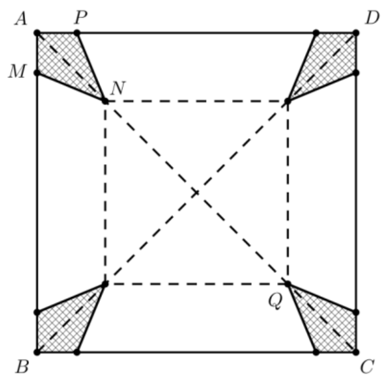
Suy ra: $7,8160 \le t \le 24,4799$

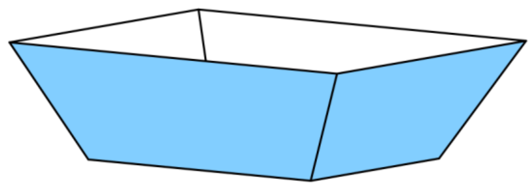
Để cả 3 thành phố cùng chịu ảnh hưởng thì thời gian t phải thuộc giao của 3 khoảng thời gian trên:

$$\max(7,0004; 8,0298; 7,816) \le t \le \min(18,856; 22,624; 24,4799) \Leftrightarrow 8,0298 \le t \le 18,856$$

Suy ra khoảng thời gian cả 3 thành phố cùng oằn mình chống bão là: $\Delta t = 18,856 - 8,0298 = 10,8262$ (giờ)

Câu 93: Từ một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 8 dm, người ta cắt bỏ bốn tứ giác bằng nhau (cùng bằng tứ giác $AMNP$) ở bốn góc tấm nhôm đó, biết $AM = AP = 1$ dm và điểm N thuộc đường chéo AC. Với phần còn lại của tấm nhôm sau khi đã bỏ đi 4 tứ giác nói trên, người ta đã gập các đoạn MN trùng với PN rồi dán kỹ bằng keo, làm tương tự cho 3 cặp đoạn còn lại, người ta thu được chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều.

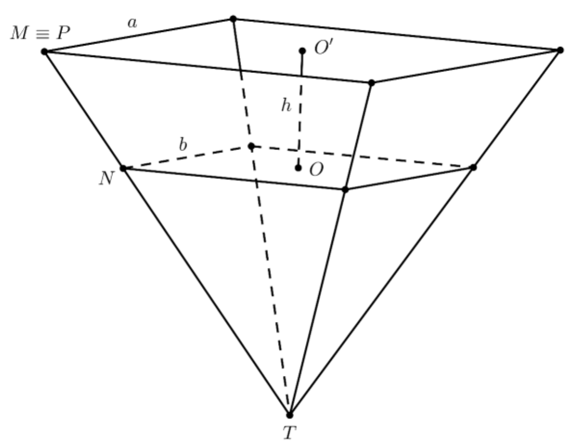




Bỏ qua độ dày tấm nhôm, sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều này là bao nhiêu lít? *(làm tròn đến hàng đơn vị)*

Lời giải tham khảo

Đáp án: 44



Có $MN = \sqrt{AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos 45^\circ} = \sqrt{AN^2 - AN\sqrt{2} + 1}$ và $NQ = AC - 2AN = 8\sqrt{2} - 2AN$

Gọi a, b, h lần lượt là cạnh đáy trên, cạnh đáy dưới và chiều cao của chậu nước.

Suy ra $a = AD - 2AP = 6$, $b = \dfrac{NQ}{\sqrt{2}} = 8 - AN\sqrt{2}$ và $h = \sqrt{MN^2 - \left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{AN\sqrt{2} - 1}$

Gọi O', O lần lượt là tâm đáy trên và đáy dưới; $T = O'O \cap MN$

Có $\begin{cases} \dfrac{TO}{TO'} = \dfrac{b}{a} \\ TO' - TO = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} TO = \dfrac{\left(8 - AN\sqrt{2}\right)\sqrt{AN\sqrt{2}-1}}{AN\sqrt{2}-2} \\ TO' = \dfrac{6\sqrt{AN\sqrt{2}-1}}{AN\sqrt{2}-2} \end{cases}$

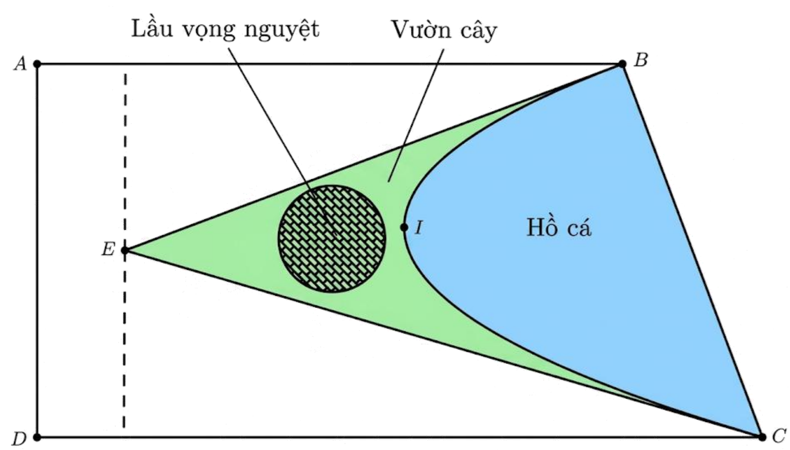
Suy ra $V_{\text{chau}} = V_{\text{chóp to}} - V_{\text{chóp bé}} = \dfrac{2\left(AN^2 - 11\sqrt{2}AN + 74\right)\sqrt{AN\sqrt{2}-1}}{3}$

Xét hàm số $f\left(AN\right) = \dfrac{2\left(AN^2 - 11\sqrt{2}AN + 74\right)\sqrt{AN\sqrt{2}-1}}{3}$ với $0 \le AN \le \dfrac{AD}{\sqrt{2}}$

Có $f'\left(AN\right) = \dfrac{5\sqrt{2}AN^2 - 70AN + 96\sqrt{2}}{3\sqrt{AN\sqrt{2}-1}}$, suy ra $f'\left(AN\right) = 0 \Leftrightarrow AN = \dfrac{35 \pm \sqrt{265}}{5\sqrt{2}}$

Vậy, $\max V_{\text{chau}} = f\left(\dfrac{35-\sqrt{265}}{5\sqrt{2}}\right) = \dfrac{4\left(67 + 2\sqrt{265}\right)\sqrt{150 - 5\sqrt{265}}}{75} \approx 44$

Câu 94: Bác Đạt có một mảnh đất hình thang vuông $ABCD$ với $AB = 34,4$ m và $AD = 21,9$ m. Bác ấy đã đào một cái hồ để nuôi cá được bao quanh bởi cạnh BC và đường cong BIC là một phần của parabol $\left(P\right)$ có đỉnh I (tham khảo hình vẽ). Để nuôi cá thì không thể thiếu trồng cây nên bác quyết định làm thêm một khu vườn để trồng cây gần hồ. Từ vị trí B bác cho trồng tre dọc theo đường thẳng vuông góc với BC đến vị trí E, rồi từ đó tiếp tục trồng tre dọc theo cạnh EC. Biết rằng khoảng cách từ I đến AB, AD tương ứng lần lượt là $9,6$ m, $21,6$ m và E cách đều AB và CD. Nếu bác muốn xây thêm một lầu vọng nguyệt trong vườn cây đó với mặt sàn là hình tròn để tiện cho việc trồng cây nuôi cá thì diện tích mặt sàn lầu vọng nguyệt lớn nhất bác có thể làm là bao nhiêu mét vuông? *(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)*.



Lời giải tham khảo

Đáp án: 49

Đặt hệ trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O trùng với đỉnh I của parabol sao cho trục hoành song song với AD (chiều dương hướng từ A đến D) và trục tung song song với AB (chiều dương hướng từ A đến B).

Dựa vào các khoảng cách giả thiết, ta xác định được tọa độ các đỉnh $A\left(-\frac{48}{5};-\frac{108}{5}\right)$ và $B\left(-\frac{48}{5};\frac{64}{5}\right)$.

Do parabol (P) nhận trục tung làm trục đối xứng và đi qua gốc tọa độ nên có dạng $y=ax^2$. Việc (P) đi qua điểm B giúp ta dễ dàng suy ra $a=\frac{5}{36}$, tức $(P): y=\frac{5}{36}x^2$, và từ đó tính được tọa độ $C\left(\frac{123}{10};\frac{1681}{80}\right)\in(P)$.

Điểm E cách đều hai đường thẳng AB và CD kết hợp với điều kiện $BE\perp BC$, ta tìm được $E\left(\frac{27}{20};-\frac{82}{5}\right)$.

Khi đó, tính toán các vectơ $\overrightarrow{EB}=\left(-\frac{219}{20};\frac{146}{5}\right)\Rightarrow\vec{u}_{EB}=(-3;8)$ và $\overrightarrow{EC}=\left(\frac{219}{20};\frac{2993}{80}\right)\Rightarrow\vec{u}_{EC}=(12;41)$, ta suy ra vectơ chỉ phương của đường phân giác trong (d) tạo bởi hai đoạn thẳng trên là $\vec{u}_d=(-1;27)$.

Gọi I' là tâm của hình tròn mặt sàn lầu vọng nguyệt (C). Để diện tích lầu vọng nguyệt đạt giá trị lớn nhất, hình tròn (C) phải tiếp xúc đồng thời với EB, EC và parabol (P).

Vì (C) tiếp xúc với hai cạnh EB, EC nên I' phải nằm trên đường phân giác (d), dẫn đến tọa độ có dạng $I'\left(\frac{27}{20}-t;-\frac{82}{5}+27t\right)$. Bán kính hình tròn được tính thông qua khoảng cách từ I' đến đường thẳng EB (có phương trình $8x+3y+\frac{192}{5}=0$), cho ta $R=d(I',EB)=t\sqrt{73}$ (với điều kiện $t>0$).

Gọi $M\left(m;\frac{5}{36}m^2\right)$ thuộc (P) là tiếp điểm tương ứng của hình tròn (C) và parabol (P), đồng thời gọi Δ là tiếp tuyến của (P) tại M với vectơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta=\left(1;\frac{5}{18}m\right)$.

Điều kiện tiếp xúc vuông góc $I'M\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{I'M}\cdot\vec{u}_\Delta=0$ thiết lập mối liên hệ: $t=\dfrac{\frac{25}{648}m^3+\frac{50}{9}m-1{,}35}{\frac{15}{2}m-1}$.

Mặt khác, ta cũng có độ dài $I'M=R$, tương đương với phương trình:

$$\left(m-(1{,}35-t)\right)^2+\left(\frac{5}{36}m^2-(-16{,}4+27t)\right)^2=73t^2.$$

Giải hệ phương trình ràng buộc này, ta thu được nghiệm $t=\frac{3}{40}\left(9-2\sqrt{2}\right)$.

Từ kết quả này, ta dễ dàng kết luận được diện tích sàn lầu vọng nguyệt lớn nhất là:

$$S_{\max}=\pi R^2=\pi\left(t\sqrt{73}\right)^2=\frac{657\left(89-36\sqrt{2}\right)}{1600}\pi\approx 49\left(\mathrm{m}^2\right).$$

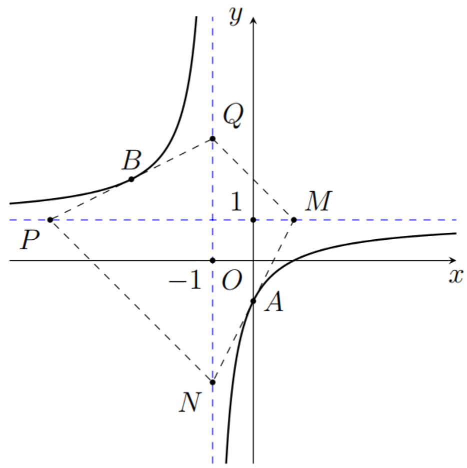
Câu 95: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Đồ thị hàm số (C) có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $y=-1$.

b) Với $M \in (C)$, tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$.

c) Gọi C và D là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$. Khi đó độ dài đoạn CD ngắn nhất bằng 4.

d) Gọi A, B là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) lần lượt tại các điểm M, N, P, Q (tham khảo hình vẽ bên dưới). Diện tích tứ giác $MNPQ$ có giá trị nhỏ nhất bằng 16



Lời giải tham khảo

Đáp án: SĐĐĐ

a) Tiệm cận đứng phải là đường song song trục $Oy: x = -1$. **Vì vậy mệnh đề sai.**

b) Với $M(x, y) \in (C)$:

KC đến $x = -1: d_1 = |x+1|$.

KC đến $y = 1: d_2 = |y-1| = \left|\dfrac{x-1}{x+1} - 1\right| = \dfrac{2}{|x+1|}$.

Tổng $S = d_1 + d_2 = |x+1| + \dfrac{2}{|x+1|}$. Đặt $t = |x+1| > 0$.

$S = t + \dfrac{2}{t} \geq 2\sqrt{2}$ (theo AM-GM), d?ng th?c khi $t = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$. **Vậy mệnh đề đúng**

c) Đồ thị $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có tâm đối xứng $I(-1,1)$.

Hai trục đối xứng đi qua tâm là: $y - 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$ và $y - 1 = -(x+1) \Leftrightarrow y = -x$.

Trong đó chỉ có đường $y = -x$ cắt đồ thị.

Nhận xét: Hai nhánh đối xứng qua tâm I. Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách và đổi nhánh này sang nhánh kia. Vì thế, với một điểm C trên nhánh này, điểm gần C nhất trên nhánh kia chính là ảnh đối xứng C' của C qua I. Do đó đoạn ngắn nhất giữa hai nhánh phải nằm trên trục đối xứng $y = -x$ và $CD_{\min} = CC'_{\min} = 2.IC_{\min}$, trong đó C là giao điểm của đồ thị với $y = -x$.

Có: $-x=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow x^2+2x-1=0$

$\Rightarrow x=-1\pm\sqrt{2},y=-x=1\mp\sqrt{2}$.

Hai điểm ở hai nhánh (đối xứng qua I) là: $C\left(-1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right),D\left(-1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

$$\Rightarrow CD=\sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4.\Rightarrow CD_{\min}=4.$$

Vậy mệnh đề đúng

d) Với $y=\dfrac{x-1}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$ có tiệm cận $y=1$ và $x=-1$.

Gọi $A\left(a;1-\dfrac{2}{a+1}\right)$ với $a>-1$ (nhánh phải) và $B\left(b;1-\dfrac{2}{b+1}\right)$ với $b<-1$ (nhánh trái).

Tiếp tuyến tại t có: $y'=\dfrac{2}{(t+1)^2},y=1-\dfrac{2}{t+1}+\dfrac{2}{(t+1)^2}(x-t)$.

- Cắt $y=1$ tại $x=2t+1$.
- Cắt $x=-1$ tại $y=1-\dfrac{4}{t+1}$.

Suy ra $M(2a+1;1),N\left(-1;1-\dfrac{4}{a+1}\right),P(2b+1;1),Q\left(-1;1-\dfrac{4}{b+1}\right)$. Diện tích tứ giác là: $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}.MP.NQ$

Có: $MP=\left|2a+1-(2b+1)\right|=2|a-b|,NQ=\left|1-\dfrac{4}{a+1}-\left(1-\dfrac{4}{b+1}\right)\right|=\dfrac{4|a-b|}{\left|(a+1)(b+1)\right|}$.

Vậy $S=\dfrac{1}{2}.2|a-b|.\dfrac{4|a-b|}{\left|(a+1)(b+1)\right|}=\dfrac{4(a-b)^2}{-(a+1)(b+1)}$.

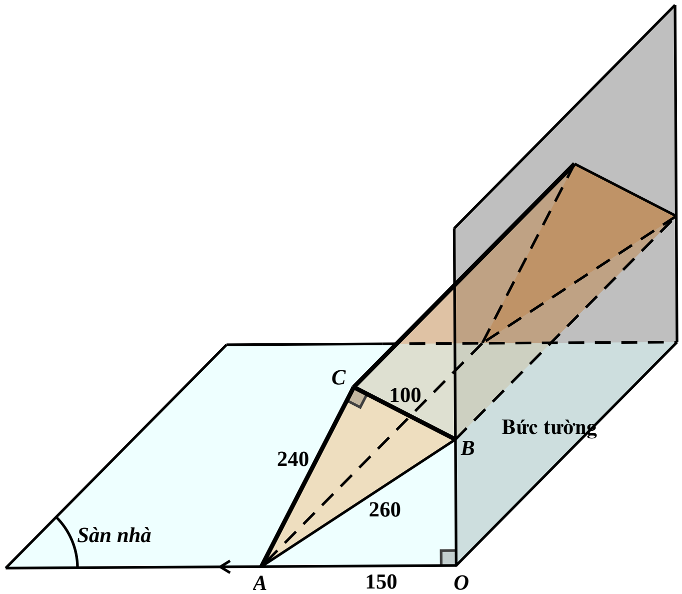
Đặt: $u=a+1>0,v=-(b+1)>0\Rightarrow a-b=u+v,-(a+1)(b+1)=uv\Rightarrow S=4\dfrac{(u+v)^2}{uv}\ge 4.\dfrac{\left(2\sqrt{uv}\right)^2}{uv}=16$.

Dấu "=" khi $u=v\Leftrightarrow a+b=-2$ (hai điểm đối xứng qua $x=-1\Rightarrow$ hai tiếp tuyến song song).

Vậy mệnh đề đúng.

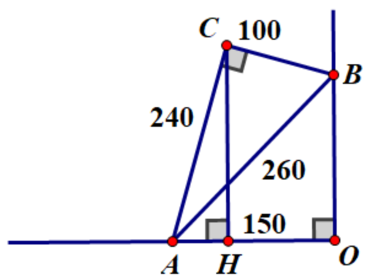
Câu 96: Có một khối lăng trụ tam giác như hình vẽ, có thiết diện là tam giác vuông ABC có các cạnh là $AB=260cm$, $BC=100cm$, $CA=240cm$. Đỉnh A di chuyển trên sàn nhà theo phương vuông góc với bức tường, đỉnh B di chuyển trên tường theo phương vuông góc với sàn nhà. Biết rằng bức tường và sàn nhà vuông góc với nhau. Ở một thời điểm, khi mà đỉnh A đang cách chân tường một đoạn bằng 150 cm thì nó di chuyển với tốc độ bằng $v_A=3,9cm/s$ thì tốc độ thay đổi của khoảng cách từ đỉnh C đến sàn nhà bằng bao nhiêu cm/s (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN



Lời giải tham khảo

Đáp án: 0,96



Đề cho OA thay đổi theo thời gian là $x(t)$ và v_A là $x'(t)$

Đề hỏi chiều cao C hay đổi theo thời gian. Nghĩa là ta cần xây dựng mối liên hệ giữa OA và CH

Ta có: $h = CH = 240.\sin OAC = 240.\sin\left(OAB + BAC\right)$

$$= 240.\left(\sin OAB.\cos BAC + \cos OAB.\sin BAC\right) = 240.\left(\frac{\sqrt{260^2 - x^2}}{260}.\frac{240}{260} + \frac{x}{260}.\frac{100}{260}\right)$$

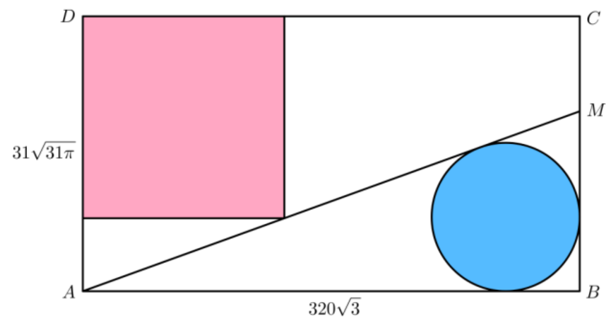
Tính đạo hàm tại thời gian t_i bài cho ta được tốc độ thay đổi của khoảng cách từ đỉnh C đến sàn nhà:

$$h'(t_i) = 240\left(\frac{240}{260^2}.\frac{-x(t_i).x'(t_i)}{\sqrt{260^2 - \left(x(t_i)\right)^2}} + \frac{100.x'(t_i)}{260^2}\right) \xrightarrow{thay\ so} \approx 0,96$$

Câu 97: Bạn Xuân Anh có một tờ giấy cứng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 320\sqrt{3}$ mm và $AD = 31\sqrt{31\pi}$ mm. Bạn chọn một điểm M thuộc cạnh BC rồi dùng thước kẻ vạch và cắt tờ giấy theo đường thẳng AM, chia tờ giấy thành hai phần.

- Phần mảnh giấy chứa cạnh CD: Bạn muốn cắt được một hình vuông có đỉnh D, hai cạnh nằm trên đường DA và DC, đỉnh còn lại hình vuông thuộc đường cắt AM.

- Phần mảnh giấy chứa cạnh AB: Bạn muốn cắt được một hình tròn sao cho hình tròn tiếp xúc với cả ba cạnh tam giác ABM.



Gọi S (phần tô đậm như hình vẽ) là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn cắt được. Hỏi khi M di động trên BC, giá trị nhỏ nhất của S bằng bao nhiêu dm^2 (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải tham khảo

Đáp án: 7,12

Cách 1:

Gọi a, r lần lượt là độ lớn cạnh hình vuông và bán kính hình tròn.

Có $(AD - a) = a\tan BAM \Leftrightarrow a = \dfrac{31\sqrt{31\pi}}{\tan BAM + 1} \Leftrightarrow a = 31\sqrt{31\pi}\,\dfrac{t^2-1}{t^2-2t-1}$ với $t = \tan\dfrac{BAM}{2}$

Có $r = (AB - r)\tan\dfrac{BAM}{2} \Leftrightarrow r = \dfrac{320\sqrt{3}t}{t+1}$

Xét hàm số $f(t) = a^2 + \pi r^2$, có $f'(t) = \dfrac{119164\pi(1-t^4)}{(t^2-2t-1)^3} + \dfrac{614400\pi t}{(t+1)^3}$, suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{7}$

Vậy, $\min S = f\left(\dfrac{1}{7}\right)\cdot 10^{-4} = \dfrac{1416\pi}{625}$ dm^2

Cách 2:

Gọi a, r lần lượt là độ lớn cạnh hình vuông và bán kính hình tròn.

Có $\tan AMB = \tan DAM \Leftrightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{a}{AD-a} \Leftrightarrow a = \dfrac{9920\sqrt{93\pi}}{MB + 320\sqrt{3}}$

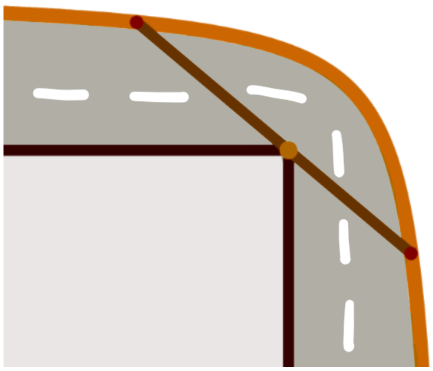
Có $AM + 2r = AB + MB \Leftrightarrow r = \dfrac{MB + 320\sqrt{3} - \sqrt{MB^2 + 307200}}{2}$

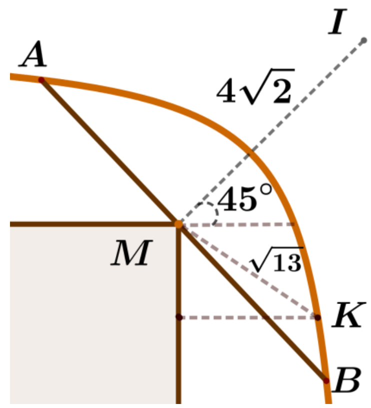
Xét hàm số $f(MB) = a^2 + \pi r^2$ với $0 < MB \le AD$

Có $f'(MB) = -2\dfrac{\left(9920\sqrt{93\pi}\right)^2}{\left(MB + 320\sqrt{3}\right)^3} + \pi\left(MB + 320\sqrt{3} - \sqrt{MB^2 + 307200}\right)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{MB}{2\sqrt{MB^2 + 307200}}\right)$

Suy ra $f'(MB) = 0 \Leftrightarrow MB = \dfrac{280}{\sqrt{3}}$, kéo theo $\min S = f\left(\dfrac{280}{\sqrt{3}}\right)\cdot 10^{-4} = \dfrac{1416\pi}{625}$ dm^2

Câu 98: Người ta sử dụng một thanh gậy để chắn toàn bộ một hình lang giới hạn bởi một góc vuông đỉnh M và một phần đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất $f(x)$ như hình vẽ. Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ nằm tại điểm I với $IM = 4\sqrt{2}$ và tạo với phương ngang một góc 45°. Điểm K nằm trên đường cong thỏa mãn $MK = \sqrt{13}$ và khoảng cách từ K đến bờ còn lại của hành lang bằng 2. Hãy xác định độ dài ngắn nhất của thanh gậy để có thể chắn hết lối đi (kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).

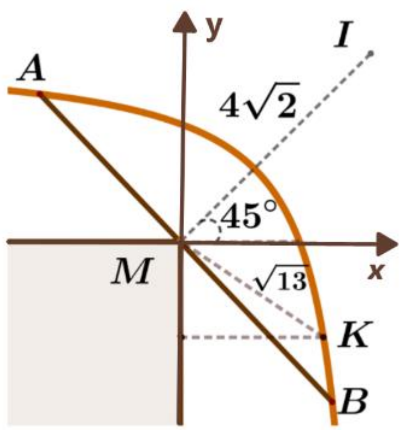




Lời giải tham khảo

Trả lời: 8,94

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ:



Vì $IM = 4\sqrt{2}$ và $\angle(IM, Ox) = 45^\circ$ nên $I(4;4)$. Do đó hàm số có dạng $y = 4 + \dfrac{k}{x-4}$

Điểm K nằm trên đường cong thỏa mãn $MK = \sqrt{13}$ và khoảng cách từ K đến bờ còn lại của hành lang bằng 2 nên $K(3;-2)$. Suy ra hàm số có dạng $\boxed{(x-4)(y-4)=6}$.

Để chắn hết lối đi, đường thẳng chứa thanh gậy phải đi qua điểm M. Phương trình đường thẳng này có dạng: $y = mx$ $(m<0)$.

Vì A, B nằm trên đường thẳng $y = mx$, nên nếu hoành độ là x_1, x_2 thì: $A(x_1, mx_1), B(x_2, mx_2)$.

Do đó: $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (m(x_2 - x_1))^2 = (1+m^2)(x_2 - x_1)^2$.

Đường thẳng $y = mx$ cắt đồ thị tại hai điểm A, B nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$(x-4)(mx-4) = 6 \Rightarrow mx^2 - 4(1+m)x + 10 = 0$

Ta có: $\Delta = 4m^2 - 2m + 4 > 0\ \forall m$ suy ra x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

Áp dụng Viète ta dễ dàng có được: $(x_2 - x_1)^2 = \dfrac{16m^2 - 8m + 16}{m^2}$.

$$\Rightarrow AB^2 = \left(1 + m^2\right) \cdot \frac{16m^2 - 8m + 16}{m^2} \Rightarrow AB_{\min} = 4\sqrt{5} \approx 8,94 \Leftrightarrow m = -1$$

Câu 99: Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Biết rằng trên (C) có những điểm mà tiếp tuyến của đồ thị tại mỗi điểm đó cắt các đường tiệm cận của (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{5}{2}$ lần bán kính đường tròn nội tiếp (I là giao điểm 2 đường tiệm cận). Tính tổng hoành độ của tất cả những điểm đó?

Lời giải

Trả lời: -4

Tiếp tuyến tại điểm bất kỳ $M\left(x_o, y_o\right) \in (C)$ bất kỳ có dạng $\Delta : y = \dfrac{3x}{\left(x_o + 1\right)^2} + \dfrac{x_o{}^2 - 4x_o - 2}{\left(x_o + 1\right)^2}$.

Giao điểm hai tiệm cận là $I(-1;1)$.

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $A\left(-1; \dfrac{x_o - 5}{x_o + 1}\right)$ và $A\left(2x_o + 1; 1\right)$.

Khi đó $IA = \dfrac{6}{\left|x_o + 1\right|}, IB = 2\left|x_o + 1\right|, AB = 2\sqrt{\left(x_o + 1\right)^2 + \dfrac{9}{\left(x_o + 1\right)^2}}$.

Diện tích tam giác IAB là

$$S = pr = \frac{IA.IB.AB}{4R} \Leftrightarrow 4pRr = IA.IB.AB \Leftrightarrow \frac{8}{5}pR^2 = 12AB \Leftrightarrow \frac{2}{5}.\frac{AB^2}{4}.p = 3AB \Leftrightarrow AB.p = 30.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x_o + 1\right)^2 + \frac{9}{\left(x_o + 1\right)^2}}\left(\frac{3}{\left|x_o + 1\right|} + \left|x_o + 1\right| + \sqrt{\left(x_o + 1\right)^2 + \frac{9}{\left(x_o + 1\right)^2}}\right) = 15$$

Đặt $t = \left|x_o + 1\right| + \dfrac{3}{\left|x_o + 1\right|}, t \geq 2\sqrt{3}$, phương trình trên trở thành

$$\sqrt{t^2 - 6}\left(t + \sqrt{t^2 - 6}\right) = 15 \Leftrightarrow 6\sqrt{t^2 - 6} = 15\left(t - \sqrt{t^2 - 6}\right) \Leftrightarrow 7\sqrt{t^2 - 6} = 5t \Leftrightarrow t = \frac{7}{2}$$

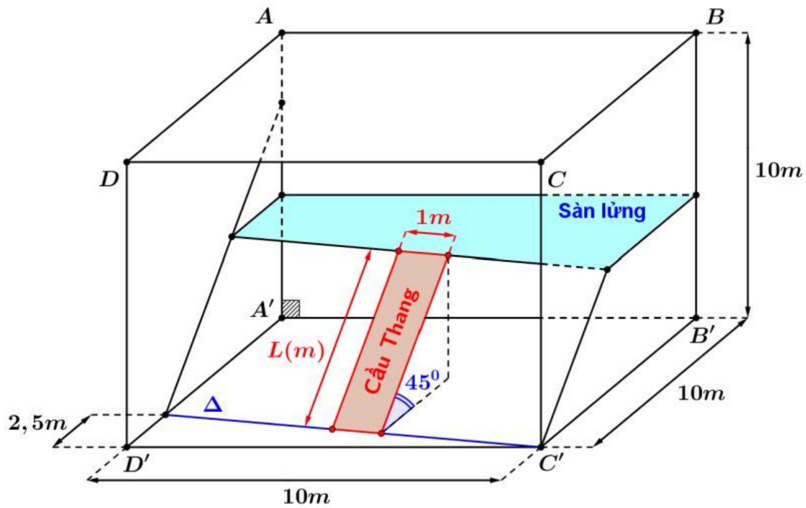
Giải phương trình $\dfrac{3}{\left|x_o + 1\right|} + \left|x_o + 1\right| = \dfrac{7}{2}$ ta được các nghiệm $x_o = 1, x_o = -3, x_o = \dfrac{1}{2}, x_o = \dfrac{-5}{2}$.

Suy ra có 4 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán $M_1\left(1; \dfrac{-1}{2}\right), M_2\left(-3; \dfrac{5}{2}\right), M_3\left(\dfrac{1}{2}; -1\right), M_4\left(-\dfrac{5}{2}; 3\right)$.

Tổng hoành độ của 4 điểm là -4.

7 MÔ HÌNH PHONG TỎA CÂU TRẢ LỜI NGẮN

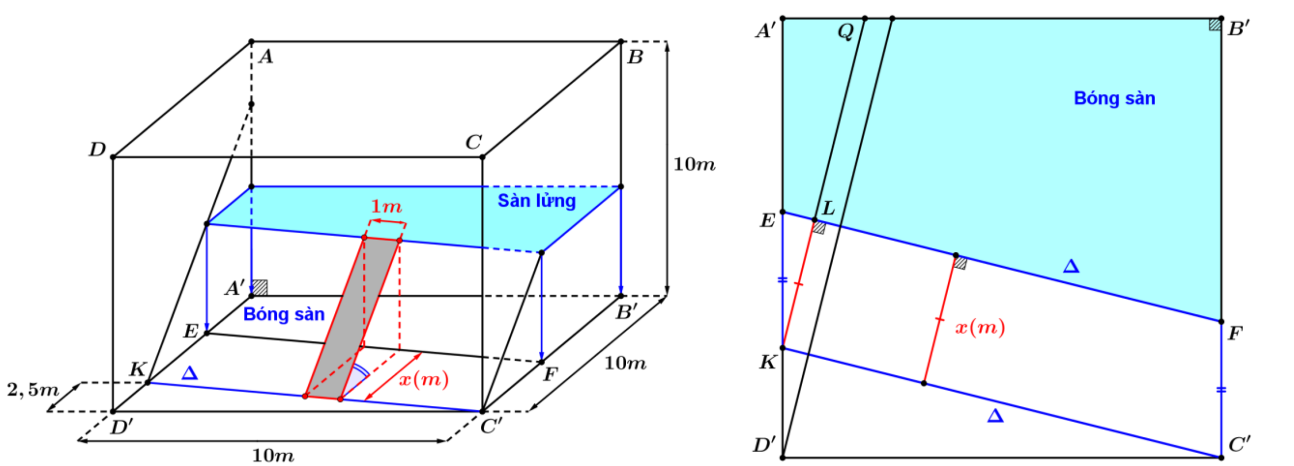
Câu 100: Một sở thú dự định xây một chuồng nhỏ trên mảnh đất hình vuông cạnh $10\,\text{m}$ để nuôi báo. Chuồng có dạng hình hộp đứng, đáy là hình vuông $A'B'C'D'$, chiều cao $10\,\text{m}$, như hình vẽ.



Bên trong chuồng, người ta làm một sàn lửng song song với mặt đất. Sàn lửng này có một cạnh áp sát vách $(ABB'A')$, đồng thời hai cạnh bên của nó nằm trên hai vách $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$. Mép tự do của sàn lửng luôn song song với đoạn thẳng KC' (với $K \in A'D'$ và $D'K = 2,5\,\text{m}$). Một cầu thang hình chữ nhật rộng $1\,\text{m}$ được bắc lên sàn lửng theo hướng vuông góc với Δ. Cầu thang hợp với mặt đất một góc $45°$. Biết chi phí làm cầu thang là 500 nghìn đồng cho mỗi mét chiều dài. Chi phí lát phủ mặt sàn lửng là 20 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Để bảo đảm an toàn, phần khoảng trống ở hai mặt bên của chuồng tính từ mép sàn lửng lên đến mái chuồng được căng lưới chắn với giá 60 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Ngoài ra, sở thú còn phải chi thêm 5 triệu đồng cho các hạng mục khác. Hỏi tổng chi phí nhỏ nhất là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải tham khảo

Đáp án: 10,8



Chiếu cả chiều dài cầu thang và toàn bộ diện tích sàn lửng xuống mặt đất là hình vuông $A'B'C'D'$ thì khi ấy ta thu được bóng sàn là hình thang vuông $A'B'FE$ và độ dài của chiếc bóng cầu thang là $x(m)$ suy ra chiều dài thang $L = x\sqrt{2}\,(m)$. Dựng một đường thẳng qua K và song song với độ dài chiếc bóng cầu thang rồi cắt EF tại L, $A'B'$ tại Q. Khi ấy ta có: $KL = x(m)$

Trong tam giác vuông $D'KC'$, ta có: $\tan D'KC' = \dfrac{D'C'}{D'K} = \dfrac{10}{2,5} = 4$

Vì $KQ \perp KC'$ nên góc $A'KQ$ phụ với góc $D'KC'$, suy ra $\tan A'KQ = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos A'KQ = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$

Xét tam giác EKL vuông tại L, ta có góc $EKL = A'KQ$ (cùng phụ với góc AKE).

Khi ấy ta suy ra: $\cos EKL = \dfrac{KL}{EK} \Rightarrow EK = \dfrac{x}{\cos EKL} = \dfrac{x\sqrt{17}}{4}$

Ta có: $A'E = A'K - EK = 7,5 - \dfrac{\sqrt{17}}{4}x$. Do $EF // \Delta$, dễ dàng tính được $B'F = A'E + 2,5 = 10 - \dfrac{\sqrt{17}}{4}x$.

Để sàn lửng nằm gọn trong chuồng là điểm E phải nằm trên đoạn $A'K$, tức là: $A'E \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{30}{\sqrt{17}}$.

Tập xác định của biến x là đoạn $\left(0; \dfrac{30}{\sqrt{17}}\right]$.

Diện tích mặt sàn lửng $S_{\text{sàn}}$ chính là diện tích hình thang $A'B'FE$:

$$S_{\text{sàn}} = \frac{A'B' \cdot (A'E + B'F)}{2} = 5\left(17,5 - \frac{\sqrt{17}}{2}x\right)$$

Diện tích phần lưới chắn S_{luoi} ở 2 mặt bên tính từ mặt sàn lửng lên đến trần (chiều cao $10 - x$) là:

$$S_{\text{luoi}} = (10 - x)(A'E + B'F) = (10 - x)\left(17,5 - \frac{\sqrt{17}}{2}x\right)$$

Hàm tổng chi phí $C(x)$ (đơn vị: triệu đồng) bao gồm:

Thang ($0,5$ tr/m); Sàn ($0,02$ tr/m^2); Lưới ($0,06$ tr/m^2) và Cố định (5 tr):

$$C(x) = 0,5x\sqrt{2} + 0,02 \cdot S_{\text{sàn}} + 0,06 \cdot S_{\text{luoi}} + 5.$$

Khảo sát hàm ta được $\min C(x) = C(7,2194) \approx 10,803$ (triệu đồng).

___Hết___